Análise Matemática 1 - 2.º Teste

28 de Novembro de 2018

Duração: 1h 30m

Justifique as suas respostas e apresente os cálculos efectuados.
Mude de folha quando mudar de grupo.

Grupo 1 - Versão A

Na folha de resposta <u>assinale Versão A</u> e indique, para cada item, qual a opção correcta.

(Resposta correcta: 1,2 v. Resposta errada com elementos justificativos: 0 v. Resposta errada sem elementos justificativos: (-0,4) v.)

1. Seja $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $x = 0$ tal que $f(0) = \frac{\pi}{3}$ e $f'(0) = \frac{1}{2}$. Qual das seguintes rectas é tangente ao gráfico da função

$$g(x) = \sin(f(x))$$

no ponto de abcissa $x = 0$?

<u>(a)</u> $y = \frac{1}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $y = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{2}$ (c) $y = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $y = 2x + 1$

2. Considere a função definida em $\mathbb{R}^+$ por

$$g(x) = x \cdot \ln(x) - x^2$$

Podemos afirmar que:

(a) O gráfico de g não tem pontos de inflexão

(b) o gráfico de g tem um ponto de inflexão em $x = e^{-\frac{1}{2}}$

<u>(c)</u> o gráfico de g tem um ponto de inflexão em $x = \frac{1}{2}$

(d) o gráfico de g tem dois pontos de inflexão distintos.

3. Considere a função real estritamente crescente definida em $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$ por $h(x) = \tan(2x) - \arccos(x)$. Denotando por h^{-1} a inversa para a composição de funções, podemos afirmar que:

(a) $(h^{-1})'(h(0)) = \dfrac{1}{2}$ | (b) $(h^{-1})'\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{3}$

(c) $(h^{-1})'(0) = -\dfrac{1}{3}$ | (d) $(h^{-1})'(h(0)) = 3$

4. Seja f uma função real de variável real contínua em $[0,1]$, diferenciável em $]0,1[$, tal que $f(1) = 0$. O Teorema de Lagrange permite-nos afirmar que

(a) Existe $c \in]0,1[$ tal que $f'(c) = f(0)$.

(b) Existe $c \in]0,1[$ tal que $f'(c) = 0$.

(c) Existe $c \in]0,1[$ tal que $f'(c) < 0$.

(d) Existe $c \in]0,1[$ tal que $-f'(c) = f(0)$.

5. Considere a função de variável real $h(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$

Podemos afirmar que:

(a) h não é contínua em $x = 0$ mas é diferenciável em $x = 0$.

(b) h é contínua em $\mathbb{R}$ mas não é diferenciável em $x = 0$.

(c) h é diferenciável em $x = 0$ e a sua derivada não é contínua em $\mathbb{R}$.

(d) h é diferenciável em $x = 0$ e a sua derivada é contínua em $\mathbb{R}$.

Grupo 2 – (Mude de folha)

(a) (2 v.) Considere a função $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x(x-1)+1$. Determine os intervalos de monotonia de f e conclua que $f(x) > 0$ para todo o x diferente de zero.

Resposta: Temos

$$f'(x) = e^x(x-1) + e^x = xe^x$$

Concluímos que $f'(x) < 0$ se $x < 0$ e $f'(x) > 0$ se $x > 0$. Assim f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$ e estritamente crescente em $[0, +\infty[$. Posto que f atinge um mínimo absoluto em $x = 0$, concluímos que $f(x) > f(0) = 0$ se $x \neq 0$.

(b) (1,5 v.) Considere a função contínua em $\mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

Verifique que se $x \neq 0$, tem-se $g'(x) = \dfrac{e^x(x-1)+1}{x^2}$ O que pode concluir, pela alínea anterior, quanto à monotonia de g?

Resposta: Calculamos, para $x \neq 0$

$$g'(x) = \frac{(e^x - 1)'x - (e^x - 1)(x)'}{x^2} = \frac{e^x \cdot x - e^x + 1}{x^2} = \frac{e^x \cdot (x-1) + 1}{x^2}$$

Pela alínea anterior, temos

$$e^x \cdot (x-1) + 1 > 0 \qquad \forall x \neq 0$$

pelo que g é estritamente crescente am $]-\infty, 0]$ e estritamente crescente em $[0, +\infty[$. Como g é contínua em $x = 0$, concluímos que g é estritamente crescente em $\mathbb{R}$.

(c) (1,5 v.) Calcule $\lim\limits_{x \to 0} g'(x)$ e conclua quanto à diferenciabilidade de g em $x = 0$.

Resposta: Aplicando a regra de L'Hospital-Cauchy,

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x(x-1)+1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{xe^x}{2x} = \frac{1}{2}$$

Posto que g é contínua em $x = 0$, resulta de um corolário do Teorema de Lagrange que g é diferenciável em 0 e $g'(0) = \frac{1}{2}$.

Grupo 3 – (Mude de folha)

(a) (2,5 v.) Escreva a fórmula de Taylor de ordem 1 em $x = 0$ da função $\arctan(x)$, com resto de Lagrange, e conclua que

$$\arctan(x) < x \qquad \text{se} \quad x > 0$$

(recorde: $(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}$)

Resposta: Temos

$$\arctan''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

pelo que a fórmula de Taylor de ordem 1 com resto de Lagrange em $x = 0$ é

$$\arctan(x) = x - \frac{2c}{(1+c^2)^2} \cdot \frac{x^2}{2!}$$

ou

$$\arctan(x) = x - \frac{c}{(1+c^2)^2} \cdot x^2$$

em que c está estritamente compreendido entre 0 e x. Em particular, se $x > 0$, temos $c > 0$ pelo que

$$-\frac{2c}{(1+c^2)^2} < 0$$

logo

$$\arctan(x) < x$$

(b) (2,5 v.) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} x \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x^2)\right)$

(sugestão: utilize a Regra de Cauchy)

Resposta: Escrevemos

$$\lim_{x \to +\infty} x \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x^2)\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(x^2)}{x^{-1}}$$

Temos

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\pi}{2} - \arctan(x^2) = 0 = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}$$

Verifica-se uma indeterminação de tipo $\frac{0}{0}$ em $+\infty$. Estamos pois nas condições de aplicação da regra de Cauchy. Derivando numerador e denominador da expressão anterior, obtemos

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-\frac{2x}{1+x^4}}{-x^{-2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3}{1+x^4} = 0$$

Concluímos então que

$$\lim_{x \to +\infty} x \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x^2)\right) = 0$$

Grupo 4 – (Mude de folha)

Pretende-se construir uma calha para escoamento de água cuja secção transversal é representada por um trapézio no plano cartesiano com vértices na origem O, $A = (\cos(\theta), \sin(\theta))$, $B = (-\frac{1}{2}, \sin(\theta))$, $C = (-\frac{1}{2}, 0)$ em que $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

(a) (1,5 v.) Verifique que a área do trapézio $OABC$ é dada pela função

$$\alpha(\theta) = \frac{1}{2}\sin(\theta) + \frac{1}{4}\sin(2\theta) \qquad \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

(recorde: $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$)

Resposta: Recordamos a fórmula da área do trapézio: (média aritmética das bases)$\times$ altura. Obtemos

$$\alpha(\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cos(\theta)\right) \cdot \sin(\theta) = \frac{1}{2}\sin(\theta) + \frac{1}{4}\sin(2\theta)$$

(Alternativamente, podemos decompor o trapézio num rectângulo de área $\frac{1}{2}\sin(\theta)$ e num triângulo de área $\frac{1}{2}\sin(\theta)\cos(\theta)$))

(b) (1 v.) Justifique que $\alpha'(\theta) = \cos^2(\theta) + \dfrac{1}{2}\cos(\theta) - \dfrac{1}{2}$.

(recorde: $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$)

Resposta: Derivando, obtemos

$$\alpha'(\theta) = \frac{1}{2}\cos(\theta) - \frac{1}{4}\cdot 2\cos(2\theta) = \frac{1}{2}\cdot\cos(\theta) - \frac{1}{2}(2\cos^2(\theta) - 1)$$

ou seja

$$\alpha'(\theta) = \cos^2(\theta) + \frac{1}{2}\cos(\theta) - \frac{1}{2}$$

(c) (1,5 v.) Utilizando, se necessário, uma mudança de variável, determine o único ponto de derivada nula de α pertencente a $]0, \frac{\pi}{2}[$. Justifique que nesse ponto α atinge um máximo absoluto e interprete o resultado no contexto do problema.

Resposta: Escrevendo $y = \cos^2(\theta)$, a condição

$$\cos^2(\theta) + \frac{1}{2}\cos(\theta) - \frac{1}{2} = 0$$

converte-se em

$$y^2 + \frac{y}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Esta equação tem duas soluções,

$$y = \frac{-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{2}}}{2} = -1 \quad \text{e} \quad y = \frac{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{2}}}{2} = \frac{1}{2}$$

Apenas a condição $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$ determina um ponto de derivada nula de α no intervalo aberto $]0, \frac{\pi}{2}[$, a saber, $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

A expressão

$$y^2 + \frac{y}{2} - \frac{1}{2}$$

assume valores positivos se $y \in]-\infty, -1[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[$ e valores negativos se $y \in]-1, \frac{1}{2}[$. Se $\theta \in]0, \frac{\pi}{3}[$ tem-se $\cos(\theta) \in]\frac{1}{2}, 1[$ pelo que $\alpha'(\theta) > 0$. Se $\theta \in]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[$, tem-se $\cos(\theta) \in]0, \frac{1}{2}[$ pelo que $\alpha'(\theta) < 0$. Logo $\alpha(\pi/3)$ é o máximo da função α.

O valor $\theta = \frac{\pi}{3}$ que maximiza a área da secção trapezoidal permite de facto maximizar o volume da calha, logo a sua capacidade de escoamento de água.

Fim.