Análise Matemática 1 - 3.º Teste

17 de Dezembro de 2018

Duração: 1h 30m

Justifique as suas respostas e apresente os cálculos efectuados.
Mude de folha quando mudar de grupo.

Grupo 1 - Versão A

Na folha de resposta assinale Versão A e indique, para cada item, qual a opção correcta.

(Resposta correcta: 1,2 v. Resposta errada com elementos justificativos: 0 v. Resposta errada sem elementos justificativos: (-0,4) v.)

1. Seja F a primitiva da função $f(x) = \sin(x)\cos(x)$ que se anula em $x = 0$. Qual o valor de $F(\frac{\pi}{4})$?

(a) 0 **(b)** $\dfrac{1}{4}$ (c) $\dfrac{1}{2}$ (d) 1

2. Considere a função $g : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$, definida por $g(x) = x^2$. Qual o valor da soma superior de Darboux da função g determinada pela partição $P = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ do intervalo $[0,1]$?

(a) 0 (b) $\dfrac{1}{8}$ (c) $\dfrac{3}{8}$ **(d)** $\dfrac{5}{8}$

3. Qual dos seguintes integrais permite calcular a área da região limitada do plano definida pelos gráficos $y = |x|$ e $y = x^2 - 2$?

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{2} x^2 - 2 - |x|\, dx$ **(b)** $\displaystyle 2 \cdot \int_{0}^{2} x - x^2 + 2\, dx$

(c) $\displaystyle\int_{-2}^{2} x - x^2 + 2\, dx$ (d) $\displaystyle 2 \cdot \int_{0}^{2} x^2 + x + 2\, dx$

4. Qual o valor de $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} xe^{-x^2}\, dx$?

(a) $\dfrac{1}{2}$ (b) $-\dfrac{1}{2}$ **(c)** $\dfrac{1}{2e}$ (d) $-\dfrac{1}{2e}$

5. Considere a função $G(x) = \displaystyle\int_1^x \ln(1+t^2)\,dt$. Podemos afirmar que:

(a) $G(2) < 0$ e $G'(2) > 0$ (b) $G(0) = G'(0) = 0$

(c) $G(1) = 0$ e $G'(1) > 1$ **(d)** $G(3) < \ln(100)$ e $G'(3) = G'(-3)$

Grupo 2 – (Mude de folha)

(a) (2,5 v.) Calcule a primitiva de $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-3x-4}$ que se anula em $x=0$ e indique o seu domínio.

Resposta: Escrevemos

$$\frac{x+2}{x^2-3x-4} = \frac{x+2}{(x+1)(x-4)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-4}$$

A resolução de um sistema dá-nos $a = -\frac{1}{5}$ e $b = \frac{6}{5}$ logo

$$\int \frac{x+2}{x^2-3x-4}\,dx = -\frac{1}{5}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{6}{5}\int \frac{1}{x-4}$$

donde

$$\int \frac{x+2}{x^2-3x-4}\,dx = -\frac{1}{5}\ln(|x+1|) + \frac{6}{5}\ln(|x-4|) + c$$

A condição de anulamento em $x=0$ impõe

$$\frac{6}{5}\ln(4) + c = 0$$

donde $c = -\frac{6}{5}\ln(4)$. O domínio da primitiva é o intervalo aberto $]-1,4[$ uma vez que a condição inicial é tomada em $x=0$.

(b) (2,5 v.) Determine $\displaystyle\int \sin(2x)\,e^{-x}$.

Resposta: Efectuamos uma integração por partes e obtemos

$$\int \sin(2x)\,e^{-x}\,dx = -e^{-x}\sin(2x) - \int -e^{-x}\cdot 2\cos(2x)\,dx = -e^{-x}\sin(2x) + 2\int e^{-x}\cos(2x)\,dx$$

Por sua vez, temos

$$\int e^{-x}\cos(2x)\,dx = -e^{-x}\cos(2x) - \int (-e^{-x})(-2\sin(2x))\,dx = -e^{-x}\cos(2x) - 2\int e^{-x}\sin(2x)\,dx$$

Substituindo

$$\int \sin(2x)\,e^{-x}\,dx = -e^{-x}\sin(2x) + 2\left(-e^{-x}\cos(2x) - 2\int e^{-x}\sin(2x)\,dx\right)$$

donde

$$5\int \sin(2x)\, e^{-x} = -e^{-x}\sin(2x) - 2e^{-x}\cos(2x) + C$$

ou

$$\int \sin(2x)\, e^{-x} = -\frac{1}{5}\cdot e^{-x}\sin(2x) - \frac{2}{5}e^{-x}\cos(2x) + c$$

Grupo 3 – (Mude de folha)

(a) (3 v.) Utilizando a mudança de variável $x(t) = e^{\sqrt{t}}$, calcule $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{2\ln(x)}{x + x\ln^2(x)}\, dx$

Resposta: Repare-se que

$$x'(t) = \frac{e^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}$$

e que a condição $e \le x \le e^2$ implica $1 \le t \le 4$ donde, pelo Teorema da Mudança de Variável no integral, temos

$$\int_e^{e^2} \frac{2\ln(x)}{x + x\ln^2(x)}\, dx = \int_1^4 \frac{2\ln(e^{\sqrt{t}})}{e^{\sqrt{t}} + e^{\sqrt{t}}\ln^2(e^{\sqrt{t}})}\cdot\frac{e^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\, dt = \int_1^4 \frac{2\sqrt{t}}{e^{\sqrt{t}}(1+t)}\cdot\frac{e^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\, dt$$

Simplificando, obtemos

$$\int_e^{e^2} \frac{2\ln(x)}{x + x\ln^2(x)}\, dx = \int_1^4 \frac{1}{1+t}\, dt = [\ln(1+t)]_1^4 = \ln(5) - \ln(2) = \ln(5/2)$$

(b) (2 v.) Mostre que $\displaystyle\left|\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\cos(4\pi x)}{1+4x^2}\, dx\right| \le \frac{\pi}{8}$

Resposta: Temos

$$\left|\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\cos(4\pi x)}{1+4x^2}\, dx\right| \le \int_0^{\frac{1}{2}} \left|\frac{\cos(4\pi x)}{1+4x^2}\right| dx \le \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+4x^2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{1+(2x)^2}\, dx = \frac{1}{2}\left[\arctan(2x)\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{8}$$

Grupo 4 – (Mude de folha)

(a) (2 valores) Admita que uma bola de rugby de dimensões oficiais é um sólido obtido por revolução em torno do eixo das abcissas de uma semi-elipse, gráfico da função

$$f : \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right] \mapsto \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{1 - \frac{4x^2}{9}}$$

em que $|x|$ é um comprimento medido em decímetros. Calcule o volume da bola oficial de rugby apresentando o resultado sob a forma simplificada. (recorde: $V = \int \pi f^2(x)\, dx$)

Resposta: Calculamos

$$V = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \pi \left(\sqrt{1 - \frac{4x^2}{9}} \right)^2 dx = \pi \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} 1 - \frac{4x^2}{9}\, dx = \pi \left[x - \frac{4}{27} x^3 \right]_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}$$

Substituindo, concluímos que o volume da bola oficial de rugby é

$$V = \pi \cdot 2 \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{27} \frac{3^3}{2^3} \right) = 2\pi \quad dm^3 = 2\pi \quad \text{litros}$$

(b) (2 valores) Considere a função $h : [1, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$, $h(x) = x^{-\alpha}$ em que $\alpha > 0$. Estude a convergência do integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} 2\pi h(x) \sqrt{1 + h'(x)^2}\, dx$$

em função do parâmetro α. Comente a seguinte afirmação:

"Seja R um sólido de $\mathbb{R}^3$ cuja superfície é finita. Então R é necessáriamente limitado (isto é, está contido numa esfera de $\mathbb{R}^3$ centrada na origem)"

Resposta: Calculamos

$$\int_1^{+\infty} 2\pi h(x) \sqrt{1 + h'(x)^2}\, dx = \int_1^{+\infty} 2\pi x^{-\alpha} \sqrt{1 + \alpha^2 x^{-2\alpha - 2}}\, dx$$

Ora

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2\pi x^{-\alpha} \sqrt{1 + \alpha^2 x^{-2\alpha-2}}}{x^{-\alpha}} = 2\pi$$

pelo que o integral impróprio estudado tem a mesma natureza do que o integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$$

ou seja: converge se $\alpha > 1$ e diverge se $\alpha \leq 1$.

A afirmação é falsa pois no caso $\alpha > 1$ os sólidos considerados neste problema têm superfície de área finita e, todavia, não são limitados em $\mathbb{R}^3$.

Fim.