FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Exame de Época especial de ***Análise Matemática 1***
26 de Julho 2019
Duração: 3h00

Justifique as suas respostas e apresente os cálculos efectuados.
Mude de folha quando mudar de grupo.

Grupo 1

Na folha de resposta do Grupo 1 indique, para cada item, qual a opção correcta.
Apresente os resultados na forma de uma grelha.

(*Grupos 1,4 e 7. Resposta correcta:* 1 *valor. Resposta errada com elementos justificativos:* 0 *valores. Resposta errada sem elementos justificativos:* $(-0,3)$ *valores.*)

1. Seja $D \subset \mathbb{R}$ o domínio da função $\dfrac{1}{\arctan^2(x)-1}$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(a) D é aberto **(b)** D é fechado **(c)** $Fr(D) = \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$ **(d)** $D' = \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right\}$

2. Considere a função $g :]0, \pi[\mapsto \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{\sin(x)}$. Podemos afirmar que:

(a) $\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$ **(b)** $\lim_{x\to \pi^-} g(x) = 1$

(c) $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 1$ **(d)** $\lim_{x\to \pi^-} g(x) = -\infty$

Grupo 2 (Mude de folha)

[0,8] **(a)** Prove, por indução, que

$$\sum_{k=1}^{n}(2k+1) = n^2 + 2n \qquad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}\,.$$

Resposta: Apropriedade é verdadeira para $n = 1$. Com efeito, $2 \cdot 1 + 1 = 1^2 + 2 \cdot 1$. Verifiquemos que a propriedade é induutiva. Admitimos a validade da propriedade para o índice n. Verifiquemos que é verdadeira para o índice $n + 1$. Temos

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k+1) = \sum_{k=1}^{n}(2k+1) + (2(n+1)+1) = n^2 + 2n + 1 + 2(n+1) = (n+1)^2 + 2(n+1)$$

(a hipótese de indução fo utilizada na igualdade do segundo e terceiro membro). A propriedade é pois verdaadeira para todo o $n \in \mathbb{N}$.

[0,6] **(b)** Seja $\epsilon > 0$. Determine uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$n > p \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2\sqrt{n}} < \epsilon$$

Resposta: Temos

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \epsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad n > \frac{1}{4\epsilon^2}$$

Seja $p \in \mathbb{N}$ um inteiro maior ou igual que a parte inteira $\lfloor \frac{1}{4\epsilon^2} \rfloor$. Então se $n > p$, verifica-se a desigualdade estudada.

[0,6] **(c)** Seja $w_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Verifique que $0 < w_n < \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$. O que pode concluir da alínea anterior?

Resposta: Temos

$$0 < w_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

Resulta desta desigualdade e da alínea anterior que, dado $\epsilon > 0$, existe uma ordem p tal que $n > p$ implica $|w_n| < \epsilon$. Concluímos que (w_n) é um infinitésimo.

Grupo 3 (Mude de folha)

Considere a função $h : [0\,,\, e-1] \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = x + \ln(x+1)$$

[1,0] **(a)** Mostre que h é injectiva e que o domínio da sua função inversa h^{-1} é o intervalo $[0\,,\, e]$.

Resposta: A função h é a soma de duas funções estritamente crescentes sendo por isso estritamente crescente. Em particular, h é injectiva. Temos além disso que h é contínua, $h(0) = 0$ e $h(e-1) = e - 1 + \ln(e) = e$ pelo que o Teorema de Bolzano implica $h([0, e-1]) = [0, e]$. Concluímos que h admite inversa h^{-1} para a composição de funções cujo domínio é o intervalo $[0, e]$.

[1,0] **(b)** Mostre que a equação

$$h^{-1}(x) = \cos(x)$$

possui uma e uma só solução em $]0, e[$.

Resposta: Consideramos a função auxiliar $g(x) = h^{-1}(x) - \cos(x)$ com $x \in [0, e]$. Sabemos eue h^{-1} é contínua e estritamente crescente. Além disso, $\cos(x)$ é contínua e estritamente decrescente em $[0, \pi]$, sendo por isso estritamente decrescente em $[0, e] \subset [0, \pi]$. Deste modo, g é contínua e estritamente crescente, $g(0) = -1$ e

$$g(e) = h^{-1}(e) - \cos(e) = e - 1 - \cos(e) > e - 2 > 0$$

Donde, pela monotonia estrita e pela propriedade do valor intermediário de g, concluímos que g possui uma única raíz. Logo a equação considerada possui uma única soluão em $[0, e]$.

Grupo 4 (Mude de folha)

Na folha de resposta do Grupo 4 indique, para cada item, qual a opção correcta.
Apresente os resultados na forma de uma grelha.

1. Qual o valor da derivada da função $\ln(\arctan(x))$ em $x = 1$?

(a) $\dfrac{\pi}{8}$ **(b)** $\dfrac{\pi}{4}$ **(c)** $\dfrac{\pi}{3}$ **<u>(d)</u>** $\dfrac{2}{\pi}$

2. Seja $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ uma função real de variável real, contínua em $[0, 1]$, diferenciável em $]0, 1[$ e tal que $f(0) = 1$ e $f(1) = 0$. Três das seguintes equações tem pelo menos uma solução em $]0, 1[$, cuja existência é garantida pelos teoremas de Rolle, Lagrange ou Cauchy.

Indique qual das seguintes equações poderá <u>não</u> ter solução em $]0, 1[$.

(a) $(xf(x))' = 0$ **<u>(b)</u>** $f'(x) = 1$

(c) $f'(x) = -1$ **(d)** $\dfrac{f'(x)}{\cos(x)} = -\dfrac{1}{\sin(1)}$

Grupo 5   (Mude de folha)

[1,3] **(a)** Estude os intervalos de monotonia da função $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x\sinh(x) - \cosh(x)$ e conclua que

$$x\sinh(x) \geq \cosh(x) - 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Resposta: Derivando

$$g'(x) = \sinh(x) + x\cosh(x) - \sinh(x) = x\cosh(x)$$

Como $\cosh(x) \geq 1$ para todo o $x \in \mathbb{R}$, temos que g' é negativa em $]-\infty, 0[$ e positiva em $]0, +\infty[$, sendo por isso g estritamente dedrescente em $]-\infty, 0]$ e estritamente crescente em $[0, +\infty[$. Em particular, g tem em $x = 0$ o seu mínimo absoluto. Donde $g(x) \geq g(0) = -1$ ou

$$x\sinh(x) \geq \cosh(x) - 1$$

[1,2] **(b)** Determine a fórmula de Taylor de ordem 1 com restp de Lagrange no ponto $x = 0$ da função $f(x) = x\ln(1+x)$ e conclua que

$$x\ln(1+x) < x^2 \qquad \text{se} \quad x > 0$$

Resposta: Calculamos

$$f'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{x+1} \quad \text{e} \quad f''(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

Escrevemos então

$$x\ln(1+x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(c)}{2}x^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c+1} + \frac{1}{(c+1)^2}\right)x^2$$

em que c está compreendido estritamente entre 0 e x. No caso $x > 0$, temos

$$\frac{1}{c+1} + \frac{1}{(c+1)^2} < 2$$

pelo que

$$x\ln(1+x) < x^2 \qquad \text{se} \quad x > 0$$

Grupo 6   (Mude de folha)

[1,5] **(a)** Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. Mostre que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1 - e^{\frac{a}{x}}}{1 - e^{\frac{b}{x}}} = \frac{a}{b}$$

Resposta: No caso $a = 0$, o resultado é trivial. Se $a \neq 0$, o limite encontra-se nas condições de aplicabilidade da Regra de Cauchy. Verifica-se em particular a indeterminação $\frac{0}{0}$ em $+\infty$. Derivando numerador e denominador, tem-se

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1 - e^{\frac{a}{x}}}{1 - e^{\frac{b}{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{a}{x^2} \cdot e^{\frac{a}{x}}}{\frac{b}{x^2} \cdot e^{\frac{b}{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a \cdot e^{\frac{a}{x}}}{b \cdot e^{\frac{b}{x}}} = \frac{a}{b}$$

posto que, para $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\alpha}{x}} = e^0 = 1$.

[1,0] **(b)** Considere a função contínua em $\mathbb{R}$ tal que

$$f(0)=0 \quad \text{e} \quad f(x)=x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{se} \quad x\neq 0$$

Mostre que f é diferenciável em 0 mas que f' não é contínua em $x=0$.

Resposta: Temos

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}x\cos\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

por tratar-se do produto de uma função limitada por um infinitésimo em $x=0$. Temos, porém, se $x\neq 0$,

$$f'(x)=2x\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Observamos que f' não tem limite em $x=0$. Podemos, por exemplo, tomar as sucessões $x_n=\frac{1}{n\pi}$ e $y_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ cujas imagens por f' tendem respectivamente para 0 e para 1.

Grupo 7 (Mude de folha)

Na folha de resposta do Grupo 7 indique, para cada item, qual a opção correcta.
Apresente os resultados na forma de uma grelha.

1. Qual a derivada da função definida em $\mathbb{R}$ por $F(x)=\displaystyle\int_1^{x^2}\frac{1}{1+\sqrt{|t|}}\,dt$?

(a) $\dfrac{2x}{1+|x|}$ **(b)** $\dfrac{1}{1+|x|}$

(c) $\dfrac{1}{1+x^2}$ **(d)** $\dfrac{2x}{1+\sqrt{|x|}}$

2. Qual das seguintes expressões permite calcular a área da região

$$D:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\quad -1\leq x\leq 1\,,\quad 0\leq y\leq \max\left\{e^{-x},e^{x}\right\}\right\}$$

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}e^x\,dx$ **(b)** $\displaystyle 2\int_0^1 e^x\,dx$

(c) $\displaystyle\int_{-1}^{0}e^x\,dx+\int_0^1 e^{-x}\,dx$ **(d)** $\displaystyle 2\int_0^1 e^{-x}\,dx$

Grupo 8 (Mude de folha)

[1,2] **(a)** Deduza, através da resolução de um sistema, coeficientes a e b tais que

$$\frac{2}{x^2-1}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-1}$$

e determine a primitiva F do primeiro membro da equação que verifica $F(-2)=0$, indicando o intervalo em que se encontra definida.

Resposta: Calculamos a e b através da resolução simples de um sistema e obtemos $a = -1$ e $b = 1$. Deste modo

$$\int \frac{2}{x^2-1}\,dx = \int \frac{-1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\,dx = -\ln(|x+1|) + \ln(|x-1|) + C$$

A condição $F(-2) = 0$ implica

$$-\ln(1) + \ln(3) + C = 0$$

pelo que $C = \ln(\frac{1}{3})$. O domínio da primitiva é o maior intervalo contendo o ponto inicial $x = -2$ em que esta é diferenciável. Ou seja, $]-\infty, -1[$.

[1,3] **(b)** Utilizando a técnica de integração por partes, calcule $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{-2}\ln(x)\,dx$.

Resposta:

$$\int_1^{+\infty} x^{-2}\ln(x)\,dx = \lim_{M\to+\infty}\int_1^{M} x^{-2}\ln(x)\,dx = \lim_{M\to+\infty}\left[-x^{-1}\ln(x)\right]_1^M + \int_1^M x^{-2}\,dx$$

Observe que

$$\lim_{M\to+\infty}\left[-x^{-1}\ln(x)\right]_1^M = \lim_{M\to+\infty} -\frac{\ln(M)}{M} = 0$$

$$\lim_{M\to+\infty}\int_1^M x^{-2}\,dx = \lim_{M\to+\infty} -\frac{1}{M} + 1 = 1$$

pelo que

$$\int_1^{+\infty} x^{-2}\ln(x)\,dx = 1$$

Grupo 9 (Mude de folha)

Considere a função $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}$ e seja

$$S = \int_0^1 2\pi f(x)\sqrt{1+(f')^2(x)}\,dx$$

[0,5] **(a)** Mostre que

$$S = \frac{4\pi}{3}\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{1+x}\,dx$$

e interprete geometricamente o valor de S.

Resposta: Calculamos $f'(x) = x^{\frac{1}{2}}$ logo

$$\int_0^1 2\pi f(x)\sqrt{1+(f')^2(x)}\,dx = \int_0^1 2\pi\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+x}\,dx = \frac{4\pi}{3}\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{1+x}\,dx$$

S é o valor da área da superfície lateral gerada pela revolução em $\mathbb{R}^3$ do gráfico de de f em torno do eixo das abcissas.

[2,0] **(b)** Justifique que

$$S \le \frac{4\pi}{3}\int_0^1 x\sqrt{1+x}\,dx$$

e calcule o integral do segundo membro usando a mudança de variável $1+x = t^2$. Apresente o resultado numa forma simplificada.

Resposta: Para $x \in [0,1]$, temos $x^{3/2} \leq x$. Posto que $\sqrt{1+x} \geq 0$, temos a desigualdade

$$x^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+x} \leq x\sqrt{1+x} \qquad \forall x \in [0,1]$$

Integrando ambos os membros, obtemos

$$S \leq \frac{4\pi}{3}\int_0^1 x\sqrt{1+x}\,dx$$

Operando a mudança de variável sugerida, temos

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x}\,dx = \int_1^{\sqrt{2}} (t^2-1)t\,\frac{dx}{dt}\,dt = \int_1^{\sqrt{2}} (t^2-1)2t^2\,dt = \int_1^{\sqrt{2}} 2t^4 - 2t^2\,dt$$

Ora

$$\int_1^{\sqrt{2}} 2t^4 - 2t^2\,dt = \left[\frac{2t^5}{5} - \frac{2t^3}{3}\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{5} - \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{5} + \frac{2}{3} = (\sqrt{2}+1)\cdot\frac{4}{15}$$

Logo

$$S \leq (\sqrt{2}+1)\cdot\frac{16\pi}{45}$$

Fim