FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Exame Final de ***Análise Matemática 1***
28 de Junho 2019
Duração: 3h00

Justifique as suas respostas e apresente os cálculos efectuados.
Mude de folha quando mudar de grupo.

Grupo 1

Na folha de resposta do Grupo 1 indique, para cada item, qual a opção correcta.
Apresente os resultados na forma de uma grelha.

(*Grupos 1,4 e 7. Resposta correcta:* 1 *valor. Resposta errada com elementos justificativos:* 0 *valores. Resposta errada sem elementos justificativos:* $(-0,3)$ *valores.*)

1. Considere o subconjunto de $\mathbb{R}$ definido por $B := (]0,1[\cap\mathbb{Q}) \cup \{\pi\}$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(a) $int(B) =]0,1[$ **(b)** $Fr(B) = \{0,1,\pi\}$ <u>**(c)**</u> $B' = [0,1]$ **(d)** $Ext(B) = \mathbb{R}\backslash\{\pi\}$

2. Considere a função $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que $g(x) = (x\sin(x))^2$. Podemos afirmar que:

(a) g tem mínimo e tem máximo. **(b)** g não tem mínimo e não tem máximo.

<u>**(c)**</u> g tem mínimo e não tem máximo. **(d)** g não tem mínimo e tem máximo.

Grupo 2 (Mude de folha)

[1,0] **(a)** Prove, por indução, que

$$\sum_{k=1}^{2n} \left((-1)^k \cdot k\right) = n \qquad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}$$

Resposta: Verifiquemos a base de indução, isto é, que igualdade é verdadeira para $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{2} \left((-1)^k \cdot k\right) = -1 + 2 = 1$$

logo verifica-se a base de indução. Verifiquemos que a propriedade é indutiva.

Supondo que $\sum_{k=1}^{2n}((-1)^k \cdot k) = n$, mostremos que $\sum_{k=1}^{2(n+1)}((-1)^k \cdot k) = n+1$. Temos

$$\sum_{k=1}^{2(n+1)}(-1)^k \cdot k = \sum_{k=1}^{2n}((-1)^k \cdot k) + (-1)^{2n+1}(n+1) + (-1)^{2n+2}(n+2) = n - (n+1) + (n+2) = n+1$$

pelo que a propriedade é indutiva. Concluímos pois que a propriedade é verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N}$.

[1,0] **(b)** Seja $\epsilon > 0$. Determine uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$n > p \quad \Rightarrow \quad \left|\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right| < \epsilon$$

O que pode concluir quanto à convergência da sucessão $w_n = \ln(n+1) - \ln(n)$?

Resposta:

Temos que

$$\left|\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right| < \epsilon$$

equivale a

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) < \epsilon$$

posto que $\ln((n+1)/n) > 0$. Resolvendo, temos

$$1 + \frac{1}{n} < e^{\epsilon}$$

ou

$$n > \frac{1}{e^{\epsilon} - 1}$$

Se tomarmos em particular p um número natural superior ao segundo membro, temos, para $n > p$

$$\left|\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right| < \epsilon$$

Ora

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n) = w_n$$

pelo que concluímos que a sucessão (w_n) verifica a condição de convergência para o limite 0.

Grupo 3 (Mude de folha)

Considere a sucessão (u_n) definida por

$$u_1 = 1\,, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2 + u_n} \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}$$

[0,4] **(a)** Mostre que $u_n > 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Resposta: Faremos a demonstração por indução. A afirmação é verdadeira para $n = 1$. Supomos a afirmação verdadeira para n, isto é $u_n > 0$. Temos então

$$u_{n+1} = \frac{1}{2 + u_n} > 0$$

o que prova a indutividade da afirmação e portanto, a sua veracidade para todo o natural n.

[0,8] **(b)** Verifique que

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq \frac{1}{4} \cdot |u_{n+1} - u_n| \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Resposta: Temos

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| = \left|\frac{1}{2 + u_{n+1}} - \frac{1}{2 + u_n}\right| = \frac{|u_n - u_{n+1}|}{(2 + u_{n+1})(2 + u_n)} < \frac{1}{4} \cdot |u_{n+1} - u_n|$$

A última desigualdade resulta da alínea anterior, já que a positividade dos termos da sucessão (u_n) garante que $u_n + 2 > 2$ para todo o natural n. Em particular,

$$0 < \frac{1}{(2 + u_{n+1})(2 + u_n)} < \frac{1}{4}$$

[0,8] **(c)** Justifique que (u_n) é convergente e determine o seu limite.

Resposta: Pela alínea anterior, e por um resultado visto na aula teórica, a sucessão (u_n) é de Cauchy, logo convergente para um limite l finito. Além disso, uma vez que os termos da sucessão (u_n) são positivos, sabemos que $l \geq 0$. Passando ao limite a relação de recorrência

$$u_{n+1} = \frac{1}{2+u_n}$$

concluímos que l verifica

$$l = \frac{1}{2+l}$$

ou

$$l^2 + 2l - 1 = 0$$

Esta equação tem raízes $l_1 = (-2+\sqrt{8})/2 = -1+\sqrt{2} > 0$ e $l_2 - 1 - \sqrt{2} < 0$ pelo que $0 \leq l = l_1$.

Grupo 4 (Mude de folha)

Na folha de resposta do Grupo 4 indique, para cada item, qual a opção correcta.
Apresente os resultados na forma de uma grelha.

1. Considere a função $v : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que $v(0) = 0$ e $v(x) = x^{\frac{4}{3}} \cdot \ln(|x|)$ se $x \neq 0$. Podemos afirmar que:

(a) v não é contínua em $x = 0$.

(b) v é diferenciável mas não é contínua em $x = 0$.

(c) v não é diferenciável em $x = 0$.

(d) v é contínua e diferenciável em $x = 0$.

2. Seja $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ uma função real de variável real, contínua em $[0,1]$, diferenciável em $]0,1[$ e tal que $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$. Três das seguintes equações tem pelo menos uma solução em $]0,1[$, cuja existência é garantida pelos teoremas de Rolle, Lagrange ou Cauchy.

Indique qual a equação que poderá não ter solução em $]0,1[$.

(a) $((x-1)f(x))' = 0$.

(b) $f'(x) = 1$.

(c) $f'(x)f(x) = 1$.

(d) $\dfrac{f'(x)}{e^x} = \dfrac{1}{e-1}$.

Grupo 5 (Mude de folha)

[1,2] **(a)** Considere a função $f :]-\sqrt{\pi}, +\infty[\backslash\{0\} \mapsto \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1-x}{\sin(x^2)} & \text{se} \quad x \in]-\sqrt{\pi}, 0[\\ \\ \frac{1-\cos(x)}{e^{x^2}-1} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

Utilizando a Regra de Cauchy, mostre que f tem limite em $x = 0$.

Resposta. Em ambos os ramos verificam-se as condições de aplicabilidade da Regra de Cauchy no estudo do limite em $x = 0$. Em particular, temos uma indeterminação de "tipo $\frac{0}{0}$". No caso do primeiro ramo, temos

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x-1-x}{\sin(x^2)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x-1}{2x\cos(x^2)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x-1}{x} \cdot 12\cos(x^2) = \frac{1}{2}$$

atendendo ao limite notável em 0 de $(e^x-1)/x$ e ao facto que $\lim_{x\to 0}\cos(x^2)=1$. Temos também

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos(x)}{e^{x^2}-1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x)}{2xe^{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{1}{2e^{x^2}}=\frac{1}{2}$$

atendendo ao limite notável da função $\sin(x)/x$ em $x=0$ e ao facto que $\lim_{x\to 0}e^{x^2}=1$. Deste modo, concluímos que $\lim_{x\to 0}f(x)=\frac{1}{2}$.

[1,3] **(b)** Escreva a fórmula de Taylor de ordem 1 em $x=0$ da função $\sin(2x)$, com resto de Lagrange, e conclua que, se $x\neq 0$,

$$|\sin(2x)-2x|<4|x^3|$$

(nota: pode utilizar a desigualdade $|\sin(\alpha)|<|\alpha|$ para $\alpha\neq 0$.)

Resposta:

Temos

$$\sin'(2x)=2\cos(2x)\,,\qquad \sin''(2x)=-4\sin(2x)$$

pelo que, pela fórmula de Taylor com resto de Lagrange em $x=0$, temos

$$\sin(2x)=2x+\frac{-4\sin(2c)}{2!}x^2$$

em que c está estritamente compreendido entre 0 e x. Daqui resulta,

$$|\sin(2x)-2x|=\left|\frac{-4\sin(2c)}{2!}x^2\right|<2\cdot|2c|\cdot x^2<4|x^3|$$

sendo a primeira desigualdade justificada por $|\sin(\alpha)|<|\alpha|$ (em que $\alpha\neq 0$) e sendo a segunda desigualdade justificada por $0<|c|<|x|$.

Grupo 6 (Mude de folha)

Uma massa pontual suspensa a uma mola e sujeita a uma força de atrito tem um movimento vertical oscilatório amortecido. Admita que a distância da massa pontual ao solo h (em metros) é dada, como função do tempo t (em segundos), por

$$h(t)=1+e^{-\sqrt{3}\cdot t}\cos(3t)$$

em que $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

[0,5] **(a)** Verifique que

$$h'(t)=3\cdot e^{-\sqrt{3}t}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\cos(3t)-\sin(3t)\right)\qquad\left(t\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)$$

Resposta: Temos

$$h'(t)=-\sqrt{3}e^{-\sqrt{3}\cdot t}\cos(3t)+e^{-\sqrt{3}\cdot t}\cdot(-3)\cdot\sin(3t)=3\cdot e^{-\sqrt{3}t}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\cos(3t)-\sin(3t)\right)$$

[2,0] **(b)** Determine o instante $t_0\in[0,\frac{\pi}{2}]$ em que a distância h é mínima.

Resposta: Estudemos o sinal da derivada de h. Temos $h'(t)=0$ equivale a

$$-\frac{\sqrt{3}}{3}\cos(3t)-\sin(3t)=0$$

e, supondo $\cos(3t)\neq 0$ temos

$$\tan(3t)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Resolvendo em $\mathbb{R}$, temos

$$3t = -\frac{\pi}{6} + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

ou

$$t = -\frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3}$$

Assim

$$h'(t) < 0 \quad \text{se} \quad t \in]0, \frac{5\pi}{18}[$$

e

$$h'(t) > 0 \quad \text{se} \quad t \in \left]\frac{5\pi}{18}, \frac{\pi}{2}\right[$$

Concluímos que h é estritamente decrescente em $[0, 5\pi/18]$ e estritamente crescente em $[5\pi/18, \pi/2]$ atingindo por isso um mínimo absoluto em $t = \frac{5\pi}{18}$.

Grupo 7 (Mude de folha)

Na folha de resposta do Grupo 7 indique, para cada item, qual a opção correcta. Apresente os resultados na forma de uma grelha.

1. Qual dos seguintes integrais resulta de $\displaystyle\int_1^{\cosh(2)} \sqrt{x^2-1}\,dx$ após a mudança de variável $x = \cosh(t)$?

(a) $\displaystyle\int_0^2 \sinh^2(t)\,dt$ **(b)** $\displaystyle\int_0^2 \sinh(t)\,dt$

(c) $\displaystyle\int_1^{\cosh(2)} \sinh^2(t)\,dt$ **(d)** $\displaystyle\int_0^2 \sinh(t)\cdot\cosh(t)\,dt$

2. Qual das seguintes expressões permite calcular a área da região

$$D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad \frac{1}{2} \le x \le 2\,, \quad 0 \le y \le \min\left\{\frac{1}{x}, x\right\}\right\}$$

(a) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x}\,dx$ **(b)** $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 x\,dx + \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x}\,dx + \int_1^2 x\,dx$ **(d)** $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 x\,dx$

Grupo 8 (Mude de folha)

[1,2] **(a)** Deduza, através da resolução de um sistema, coeficientes a, b e c tais que

$$\frac{x^2}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{x-1}$$

e determine a primitiva F do primeiro membro da equação que verifica $F(0) = \frac{1}{2}$, indicando o intervalo em que se encontra definida.

Resposta: Escrevemos

$$\frac{x^2}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{x-1} = \frac{a(x^2-1) + b(x-1) + c(x+1)^2}{(x-1)(x+1)^2}$$

ou

$$\frac{x^2}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{(a+c)x^2+(b+2c)x+(c-a-b)}{(x-1)(x+1)^2}$$

donde resulta

$$a+c=1\,,\quad b+2c=0\,,\quad c-a-b=0\,,$$

Resolvendo obtemos $c=\frac{1}{4}$, $a=\frac{3}{4}$ e $b=-\frac{1}{2}$. Concluímos

$$\int \frac{x^2}{(x+1)^2(x-1)}\,dx = \frac{\frac{3}{4}}{x+1} - \frac{\frac{1}{2}}{(x+1)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{x-1}\,dx$$

ou

$$\int \frac{x^2}{(x+1)^2(x-1)}\,dx = \frac{3}{4}\ln(|x+1|) + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{4}\ln(|x-1|) + c$$

A condição $F(0)=1/2$ determina $\frac{1}{2}+c=0$ pelo que $c=-\frac{1}{2}$. O domínio de F é o intervalo $]-1,1[$ uma vez que é o maio intervalo contendo o ponto em que é dada a condição inicial.

[1,3] **(b)** Utilizando a técnica de integração por partes, calcule $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \arccos(x)\,dx$. Apresente o resultado numa forma simplificada. (recorde: $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$)

Resposta: Temos

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \arccos(x)\,dx = [x\arccos(x)]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left[\sqrt{1-x^2}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

donde

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \arccos(x)\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{4} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Grupo 9 (Mude de folha)

[1,2] **(a)** Seja C uma constante real. Considere a função real de variável real

$$\phi(x) = \int_0^{x+\pi} \cos^2(t) + C\,dt - \int_0^{x} \cos^2(t) + C\,dt\,, \qquad x\in\mathbb{R}\,.$$

Justique que $\phi(x)$ é uma função constante (sugestão: calcule $\phi'(x)$).

Resposta: Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\phi'(x) = \cos^2(x+\pi) - \cos^2(x)$$

e, tendo em conta que a função $\cos^2(x)$ é π-periódica, concluímos que $\phi'=0$ em $\mathbb{R}$ o que implica que ϕ é uma função constante.

[1,3] **(b)** Calcule $\int_0^1 e^{-3x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$. (apresente o resultado na forma simplificada)

Resposta: Calculamos

$$\int_0^1 e^{-3x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1 e^{-3x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\left[-\frac{1}{3}e^{-3x} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right]_\epsilon^1 = -\frac{1}{3}e^{-3} + \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} - \frac{1}{3}e^{-3}$$

Fim