FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Melhoria 2.º Teste de ***Análise Matemática 1***
28 de Junho 2019
Duração: 1h 30m

Justifique as suas respostas e apresente os cálculos efectuados.
Mude de folha quando mudar de grupo.

Grupo 1

Na folha de resposta do Grupo 1 indique, para cada item, qual a opção correcta.
Apresente os resultados na forma de uma grelha.

(*Resposta correcta:* $1,2$ *valores. Resposta errada com elementos justificativos:* 0 *valores. Resposta errada sem elementos justificativos:* $(-0,4)$ *valores.*)

1. Qual o valor da derivada da função $g(x) = \ln(\ln(x))$ no ponto $x = e$, em que e é o número de Neper?

(a) $-e^{-1}$ **(b)** e^{-1} **(c)** 1 **(d)** e

2. Considere a função h, definida em $\mathbb{R}$, duas vezes diferenciável, tal que $h(x) = x^2 - \sin(2x)$. Podemos afirmar que:

(a) O gráfico de h não tem pontos de inflexão.

(b) O ponto do gráfico de h com abcissa $x = -\frac{\pi}{6}$ é ponto de inflexão.

(c) O ponto do gráfico de h com abcissa $x = \frac{11\pi}{12}$ é ponto de inflexão.

(d) O ponto do gráfico de h com abcissa $x = \frac{\pi}{12}$ é ponto de inflexão.

3. Considere a função $v : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que $v(0) = 0$ e $v(x) = x^{\frac{4}{3}} \cdot \ln(|x|)$ se $x \neq 0$. Podemos afirmar que:

(a) v não é contínua em $x = 0$.

(b) v é diferenciável mas não é contínua em $x = 0$.

(c) v não é diferenciável em $x = 0$.

(d) v é contínua e diferenciável em $x = 0$.

4. Seja $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ uma função real de variável real, contínua em $[0, 1]$, diferenciável em $]0, 1[$ e tal que $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$. Três das seguintes equações tem pelo menos uma solução em $]0, 1[$, cuja existência é garantida pelos teoremas de Rolle, Lagrange ou Cauchy.

Indique qual a equação que poderá não ter solução em $]0, 1[$.

(a) $((x-1)f(x))' = 0$.

(b) $f'(x) = 1$.

(c) $f'(x)f(x) = 1$.

(d) $\dfrac{f'(x)}{e^x} = \dfrac{1}{e-1}$.

5. Considere a função $w : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida por $w(x) = e^{kx}$ em que k é um parâmetro real diferente de zero. Seja r a recta tangente ao gráfico de w no ponto de abcissa x. Qual a abcissa do ponto de intersecção de r com o eixo dos x?

(a) $x - k$ **(b)** $x + k$ **(c)** $x - \dfrac{1}{k}$ **(d)** $x + \dfrac{1}{k}$

(Continua no verso)

Grupo 2 (Mude de folha)

Considere a função $f :]-\sqrt{\pi}, +\infty[\setminus\{0\} \mapsto \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1-x}{\sin(x^2)} & \text{se} \quad x \in]-\sqrt{\pi}, 0[\\ \\ \frac{1-\cos(x)}{e^{x^2}-1} & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

[3,0] **(a)** Utilizando a Regra de Cauchy, mostre que f tem limite em $x = 0$.

Resposta. Em ambos os ramos verificam-se as condições de aplicabilidade da Regra de Cauchy no estudo do limite em $x = 0$. Em particular, temos uma indeterminação de "tipo $\frac{0}{0}$". No caso do primeiro ramo, temos

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - 1 - x}{\sin(x^2)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - 1}{2x\cos(x^2)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - 1}{x} \cdot 12\cos(x^2) = \frac{1}{2}$$

atendendo ao limite notável em 0 de $(e^x - 1)/x$ e ao facto que $\lim_{x\to 0} \cos(x^2) = 1$. Temos também

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1 - \cos(x)}{e^{x^2} - 1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{2e^{x^2}} = \frac{1}{2}$$

atendendo ao limite notável da função $\sin(x)/x$ em $x = 0$ e ao facto que $\lim_{x\to 0} e^{x^2} = 1$. Deste modo, concluímos que $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$.

[2,0] **(b)** De uma certa função $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ sabemos que tem derivada em todo o $x \neq 0$ e que $F'(x) = f(x)$, em que f é a função considerada na alínea anterior.

Utilizando resultados da aula teórica, justifique que F é diferenciável em $x = 0$ se e só se F é contínua em $x = 0$.

Resposta: Sabemos pelo um resultado da teórica que toda a função diferenciável num ponto é contínua nesse ponto. Supondo agora que a função F é contínua em $x = 0$, sabemos da alínea anterior que F é diferenciável em $]-\pi, \pi[\setminus\{0\}$ e que $F' = f$ tem limite em $x = 0$. Resulta então de um corolário do Teorema de Lagrange que F é diferenciável em $x = 0$.

Grupo 3 (Mude de folha)

[3,0] **(a)** Escreva a fórmula de Taylor de ordem 1 em $x = 0$ da função $\sin(2x)$, com resto de Lagrange, e conclua que, se $x \neq 0$,

$$|\sin(2x) - 2x| < 4|x^3|$$

(nota: pode utilizar a desigualdade $|\sin(\alpha)| < |\alpha|$ para $\alpha \neq 0$.)

Resposta:

Temos

$$\sin'(2x) = 2\cos(2x)\,, \qquad \sin''(2x) = -4\sin(2x)$$

pelo que, pela fórmula de Taylor com resto de Lagrange em $x = 0$, temos

$$\sin(2x) = 2x + \frac{-4\sin(2c)}{2!}x^2$$

em que c está estritamente compreendido entre 0 e x. Daqui resulta,

$$|\sin(2x) - 2x| = \left|\frac{-4\sin(2c)}{2!}x^2\right| < 2 \cdot |2c| \cdot x^2 < 4|x^3|$$

sendo a primeira desigualdade justificada por $|\sin(\alpha)| < |\alpha|$ (em que $\alpha \neq 0$) e sendo a segunda desigualdade justificada por $0 < |c| < |x|$.

[2,0] **(b)** Seja $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ com polinómio de Taylor de ordem 2 no ponto $x = 0$ dado por

$$p(x) = 1 - x + x^2$$

Verifique que a função $h(x) = e^x \cdot f(x)$ tem um mínimo relativo em $x = 0$.

(sugestão: recorde a coincidência das derivadas de p com as derivadas de f num certo ponto e calcule $h'(0)$ e $h''(0)$)

Resposta: Sabemos que o polinómio de Taylor p em $x = 0$ verifica $f(0) = p(0) = 1$, $f'(0) = p'(0) = -1$ e $f''(0) = p''(0) = 2$.

Donde

$$h'(0) = f'(0)e^0 + f(0)e^0 = -1 + 1 = 0 \quad \text{e} \quad h''(0) = f''(0)e^0 + 2e^0 f'(0) + e^0 f(0) = 2 - 2 + 1 = 1 > 0$$

pelo que a função h tem um ponto estacionário com a concavidade voltada para cima em $x = 0$ sendo por isso um mínimo relativo.

Grupo 4 (Mude de folha)

Uma massa pontual suspensa a uma mola e sujeita a uma força de atrito tem um movimento vertical oscilatório amortecido. Admita que a distância ao solo h (em metros) é dada, como função do tempo t (em segundos), por

$$h(t) = 1 + e^{-\sqrt{3}\cdot t}\cos(3t)$$

em que $t \in [0, +\infty[$.

[1,0] **(a)** Verifique que

$$h'(t) = 3 \cdot e^{-\sqrt{3}t} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\cos(3t) - \sin(3t)\right) \qquad (t \in]0, \frac{\pi}{2}[)$$

Resposta: Temos

$$h'(t) = -\sqrt{3}e^{-\sqrt{3}\cdot t}\cos(3t) + e^{-\sqrt{3}\cdot t} \cdot (-3) \cdot \sin(3t) = 3 \cdot e^{-\sqrt{3}t} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\cos(3t) - \sin(3t)\right)$$

[3,0] **(b)** Determine o instante $t_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ em que a distância h é mínima.

Resposta: Estudemos o sinal da derivada de h. Temos $h'(t) = 0$ equivale a

$$-\frac{\sqrt{3}}{3}\cos(3t) - \sin(3t) = 0$$

e, supondo $\cos(3t) \neq 0$ temos

$$\tan(3t) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Resolvendo em $\mathbb{R}$, temos

$$3t = -\frac{\pi}{6} + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

ou

$$t = -\frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3}$$

Assim

$$h'(t) < 0 \quad \text{se} \quad t \in]0, \frac{5\pi}{18}[$$

e

$$h'(t) < 0 \quad \text{se} \quad t \in \left] \frac{5\pi}{18}, \frac{\pi}{2} \right[$$

Concluímos que h é estritamente decrescente em $[0, 5\pi/18]$ e estritamente crescente em $[5\pi/18, \pi/2]$ atingindo por isso um mínimo absoluto em $t = \frac{5\pi}{18}$.

Fim