FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

3.º Teste de ***Análise Matemática 1***
28 de Junho 2019
Duração: 1h 30m

Justifique as suas respostas e apresente os cálculos efectuados.
Mude de folha quando mudar de grupo.

Grupo 1

Na folha de resposta do Grupo 1 indique, para cada item, qual a opção correcta.
Apresente os resultados na forma de uma grelha.

(*Resposta correcta:* $1,2$ *valores. Resposta errada com elementos justificativos:* 0 *valores. Resposta errada sem elementos justificativos:* $(-0,4)$ *valores.*)

1. Considere a função f, definida em $]-\pi,\pi[$ por $f(x)=\dfrac{1}{2}\cdot(1+\tan^2(x/2))$. Seja F a primitiva de f que se anula em $x=\dfrac{\pi}{2}$. Qual o valor de $F(0)$?

(a) -1 **(b)** 0 **(c)** $\sqrt{3}$ **(d)** 1

2. Considere $f:[0,1]\mapsto\mathbb{R}$ uma função integrável e seja $P=\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\}$ uma partição de $[0,1]$. Qual dos seguintes somatórios representa uma soma de Riemann de f associada à partição P?

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2}\left(\sup f_{[k/3,(k+1)/3]}\right)\cdot\frac{1}{3}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{2} f\left(\frac{1}{6}+k/3\right)\cdot\frac{1}{3}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2}\left(\inf f_{[k/3,(k+1)/3]}\right)\cdot\frac{1}{3}$ **(d)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{2} f\left(\frac{1}{6}+k/3\right)\cdot\frac{1}{4}$

3. Qual dos seguintes integrais resulta de $\displaystyle\int_1^{\cosh(2)}\sqrt{x^2-1}\,dx$ após a mudança de variável $x=\cosh(t)$?

(a) $\displaystyle\int_0^2\sinh^2(t)\,dt$ **(b)** $\displaystyle\int_0^2\sinh(t)\,dt$

(c) $\displaystyle\int_1^{\cosh(2)}\sinh^2(t)\,dt$ **(d)** $\displaystyle\int_0^2\sinh(t)\cdot\cosh(t)\,dt$

4. Qual dos seguintes expressões permite calcular a área da região

$$D:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\quad \frac{1}{2}\le x\le 2\,,\quad 0\le y\le\min\left\{\frac{1}{x},x\right\}\right\}$$

(a) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2\frac{1}{x}\,dx$ **(b)** $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 x\,dx+\int_1^2\frac{1}{x}\,dx$

(c) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{x}\,dx+\int_1^2 x\,dx$ **(d)** $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 x\,dx$

5. Qual dos seguintes integrais impróprios é convergente?

(a) $\displaystyle\int_0^1\frac{\sin(x)}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$ **(b)** $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{x}\,dx$ **(c)** $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ **(d)** $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln(x)}{x}\,dx$

(Continua no verso)

Grupo 2 (Mude de folha)

[2,5] **(a)** Deduza, através da resolução de um sistema, coeficientes a, b e c tais que

$$\frac{x^2}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{x-1}$$

e determine a primitiva F do primeiro membro da equação que verifica $F(0) = \frac{1}{2}$, indicando o intervalo em que se encontra definida.

Resposta: Escrevemos

$$\frac{x^2}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{x-1} = \frac{a(x^2-1) + b(x-1) + c(x+1)^2}{(x-1)(x+1)^2}$$

ou

$$\frac{x^2}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{(a+c)x^2 + (b+2c)x + (c-a-b)}{(x-1)(x+1)^2}$$

donde resulta

$$a + c = 1\,, \quad b + 2c = 0\,, \quad c - a - b = 0\,,$$

Resolvendo obtemos $c = \frac{1}{4}$, $a = \frac{3}{4}$ e $b = -\frac{1}{2}$. Concluímos

$$\int \frac{x^2}{(x+1)^2(x-1)}\,dx = \frac{\frac{3}{4}}{x+1} - \frac{\frac{1}{2}}{(x+1)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{x-1}\,dx$$

ou

$$\int \frac{x^2}{(x+1)^2(x-1)}\,dx = \frac{3}{4}\ln(|x+1|) + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{4}\ln(|x-1|) + c$$

A condição $F(0) = 1/2$ determina $\frac{1}{2} + c = 0$ pelo que $c = -\frac{1}{2}$. O domínio de F é o intervalo $]-1, 1[$ uma vez que é o maio intervalo contendo o ponto em que é dada a condição inicial.

[2,5] **(b)** Utilizando a técnica de integração por partes, calcule $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \arccos(x)\,dx$. (apresente o resultado numa forma simplificada)
(recorde: $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$)

Resposta: Temos

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \arccos(x)\,dx = [x\arccos(x)]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left[\sqrt{1-x^2}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

donde

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \arccos(x)\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{4} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Grupo 3 (Mude de folha)

[2,0] **(a)** Seja C uma constante real. Considere a função real de variável real

$$\phi(x) = \int_0^{x+\pi} \cos^2(t) + C\,dt - \int_0^{x} \cos^2(t) + C\,dt\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Justique que $\phi(x)$ é uma função constante (sugestão: calcule $\phi'(x)$).

Resposta: Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\phi'(x) = \cos^2(x+\pi) - \cos^2(x)$$

e, tendo em conta que a função $\cos^2(x)$ é π-periódica, concluímos que $\phi' = 0$ em $\mathbb{R}$ o que implica que ϕ é uma função constante.

[2,0] **(b)** Determine $C_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_0^\pi \cos^2(t) + C_0\, dt = 0$$

(recorde: $2\cos^2(t) - 1 = \cos(2t)$)

Resposta: Temos

$$\int_0^\pi \cos^2(t) + C_0\, dt = \int_0^\pi \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{2}\, dt + \pi C_0 = \left[\frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{t}{2}\right]_0^\pi + \pi C_0 = \frac{\pi}{2} + \pi C_0$$

Igualando o último membro a zero, concluímos que $C_0 = -\frac{1}{2}$.

[1,0] **(c)** Considere C_0 o valor considerado na alínea anterior. Utilize o resultado da primeira alínea para mostrar que a função definida por

$$F(x) = \int_0^x \cos^2(t) + C_0\, dt$$

é π- periódica, isto é, verifica $F(x+\pi) = F(x)$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Resposta: Temos, pelo resultado da primeira alínea, que

$$F(x+\pi) - F(x) = k$$

em que k é uma constante. Tomando $x = 0$, temos

$$k = F(0+\pi) - F(0) = \int_0^\pi \cos^2(t) + C_0\, dt - \int_0^0 \cos^2(t) + C_0\, dt = 0$$

pela nossa escolha de C_0 e por uma propriedade conhecida do integral. Concluímos que $F(x+\pi) = F(x)$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Grupo 4 (Mude de folha)

[1,5] **(a)** Calcule $\displaystyle\int_0^1 e^{-3x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx$. (apresente o resultado na forma simplificada)

Resposta: Calculamos

$$\int_0^1 e^{-3x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1 e^{-3x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx = \left[-\frac{1}{3}e^{-3x} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right]_\epsilon^1 = -\frac{1}{3}e^{-3} + \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} - \frac{1}{3}e^{-3}$$

[2,5] **(b)** Admita que o centro de gravidade C de um sólido, com densidade homogénea, obtido por revolução em torno do eixo dos x da região D

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x \in [a,b], \quad 0 \le y \le f(x)\}$$

(em que f é uma função contínua), tem coordenadas espaciais $(x_c, 0, 0)$ em que

$$x_c = \frac{\int_a^b \pi x f^2(x)\, dx}{V} \qquad \text{sendo } V \text{ o volume do sólido.}$$

Determine as coordenadas do centro de gravidade de uma <u>semi-esfera</u> de raio R, obtida por rotação da região

$$D_s = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x \in [0, R], \quad 0 \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}\}$$

em torno do eixo das abcissas.

(nota: recorde que o volume da esfera de raio R é $4/3 \cdot \pi R^3$.)

Resposta: Temos

$$\int_0^R \pi x \cdot (\sqrt{R^2 - x^2})^2 \, dx = \int_0^R \pi R^2 x - x^3 \, dx = \pi \left[R^2 x^2/2 - \frac{x^4}{4} \right]_0^R = \frac{R^4}{4}$$

O volume da semi-esfera é $\frac{2}{3} \cdot \pi R^3$. Logo o centro de gravidade da semi-esfera tem coordenadas $(x_c, 0, 0)$ em que

$$x_c = \frac{R^4/4}{\frac{2}{3} \cdot \pi R^3} = \frac{3}{8} R$$

Fim