FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

1.º Teste de ***Análise Matemática 1***
10 de Abril 2019
Duração: 1h 30m

Justifique as suas respostas e apresente os cálculos efectuados.
Mude de folha quando mudar de grupo.

Grupo 1

Na folha de resposta do Grupo 1 indique, para cada item, qual a opção correcta.
Apresente os resultados na forma de uma grelha.

(*Resposta correcta:* $1,2$ *valores. Resposta errada com elementos justificativos:* 0 *valores. Resposta errada sem elementos justificativos:* $(-0,4)$ *valores.*)

1. Seja D o domínio da função de variável real $f(x) = \sqrt{2-x^2} \cdot \ln(x^2)$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(a) $0 \in \operatorname{int} D$ **(b)** $\operatorname{Fr} D = \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$ **(c)** $0 \in \operatorname{Ext} D$ **(d)** $\operatorname{Fr} D = \left\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\right\}$

2. Considere o subconjunto de $\mathbb{R}$, $A = \left\{ \left(1 + \frac{\cos(n\pi)}{n}\right)^n : n \in \mathbb{N} \right\}$. Qual dos seguintes conjuntos é o derivado A' de A?

(a) $\{e^{-1}\}$ **(b)** $\{-1, 1\}$ **(c)** $\{e^{-1}, e\}$ **(d)** $\{e\}$

3. Qual o valor de $\lim n - \sqrt{n^2 - 1}$?

(a) -1 **(b)** 0 **(c)** 1 **(d)** $+\infty$

4. Considere a função injectiva $g : [0, \frac{1}{2}] \mapsto \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \arccos(\sqrt{1-x})$. Qual das seguintes funções é a inversa g^{-1} de g?

(a) $h_1(y) = \sin^2(y)\,, \quad y \in [0, \frac{\pi}{4}]$ **(b)** $h_2(y) = \sin^2(y)\,, \quad y \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$

(c) $h_3(y) = \cos^2(y)\,, \quad y \in [0, \frac{\pi}{4}]$ **(d)** $h_4(y) = \arcsin(1 - y^2)\,, \quad y \in [0, \frac{1}{2}]$

5. Seja $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$. Podemos afirmar que:

(a) f não tem máximo e não tem mínimo. **(b)** f tem máximo e não tem mínimo.

(c) f não tem máximo e tem mínimo. **(d)** f tem máximo e tem mínimo.

(Continua no verso)

Grupo 2 (Mude de folha)

Considere a sucessão

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

[2,5] **(a)** Prove por indução que

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Resposta: Temos que $s_1 = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$ pelo que se verifica a base de indução. Mostremos que a propriedade é indutiva. Admitimos que a igualdade é verdadeira para n (hipótese de indução) e justificamos que

$$s_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+2}$$

Escrevemos

$$s_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Por hipótese de indução temos

$$s_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1 + \frac{-(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{(n+1)}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+2}$$

Logo a propriedade é indutiva e concluímos que é verdadeira para todo o natural n.

[2,5] **(b)** Seja $\epsilon > 0$. Utilizando a alínea anterior, indique uma ordem p tal que, se $n > p$, tem-se

$$|s_n - 1| < \epsilon$$

O que podemos concluir quanto à sucessão (s_n)?

Resposta: Temos, pela alínea anterior,

$$|s_n - 1| = \left|1 - \frac{1}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1}$$

pelo que

$$|s_n - 1| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n+1} < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{1}{\epsilon} - 1$$

Donde, se tomarmos p um natural maior ou igual a $\lfloor \epsilon^{-1} - 1 \rfloor$, concluímos que se $n > p$, tem-se $|s_n - 1| < \epsilon$.

Podemos então concluir que a sucessão (s_n) verifica a definição de convergência para o limite $L = 1$.

Grupo 3 (Mude de folha)

Considere a função $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{\sin^2(x)}{x^2}$.

[2,5] **(a)** Estude a existência de limite para f em 0^+ e em $+\infty$.

Resposta: Temos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2$$

pelo que, pelo limite notável da função seno em $x = 0$,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin^2(x)}{x^2} = 1^2 = 1$$

Posto que

$$0 \leq \frac{\sin^2(x)}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

temos que

$$0 \leq \liminf_{x \to +\infty} f(x) \leq \limsup_{x \to +\infty} f(x) \leq \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

pelo que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

[2,5] **(b)** Mostre que f tem um máximo relativo em cada intervalo $I_n =]n\pi, (n+1)\pi[$ com $n \in \mathbb{N}$.

(sugestão: determine os valores de f na fronteira de I_n e utilize o Teorema de Weierstrass).

Resposta: Supomos $n \in \mathbb{N}$ fixado. Pelo Teorema de Weierstrass, f tem máximo e mínimo no intervalo $[n\pi, (n+1)\pi]$. Temos $f(n\pi) = f((n+1)\pi) = 0$. A afirmação ficará provada se mostrarmos que f atinge um máximo estritamente positivo. Ora

$$\max_{[n\pi, (n+1)\pi]} f \geq f\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{(n\pi + \frac{\pi}{2})^2} > 0$$

o que demonstra o resultado.

Grupo 4 (Mude de folha)

Sabe-se que a equação $x = 2^{-x}$ tem uma única solução $x_0 \in \mathbb{R}$.

[2,0] **(a)** Mostre que $x_0 \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

(sugestão: estude a existência de um zero para a função $h(x) = x - 2^{-x}$).

Resposta: Considera-se a função definida em $\mathbb{R}$ por $h(x) = x - 2^{-x}$. Trata-se de uma função contínua (diferença da identidade e de uma função de tipo exponencial) pelo que, em particular, encontra-se nas condições do Teorema de Bolzano (ou do Valor Intermediário). Tem-se

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} < 0$$

e

$$h(1) = 1 - 2^{-1} = \frac{1}{2} > 0$$

Logo, pelo corolário do Teorema de Bolzano, existe um zero c da função h no intervalo $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$ que verifica $c = 2^{-c}$. Como sabemos que a solução desta equação é única, concluímos que $c = x_0$, e portanto que $x_0 \in]\frac{1}{2}, 1[$.

[2,0] **(b)** Sabendo que

$$|2^{-x} - 2^{-y}| < \frac{1}{2} \cdot |x - y| \qquad \forall x, y \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

mostre que a sucessão definida por

$$u_1 = 1\,, \quad u_{n+1} = 2^{-u_n}$$

é convergente para x_0.

(sugestão: mostre que $u_n \in [\frac{1}{2}, 1]$ para todo o $n \in \mathbb{N}$ e conclua que (u_n) é convergente).

Resposta: Começemos por demonstrar que $u_n \in [\frac{1}{2}, 1]$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. A afirmação é claramente verdadeira para $n = 1$. Admitamos que $u_n \in [\frac{1}{2}, 1]$ (hipótese de indução) e verifiquemos que tal implica que $u_{n+1} \in [1/2, 1]$ (tese de indução). Temos, pelo decrescimento da função $x \mapsto 2^{-x}$,

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1 \quad \Rightarrow 2^{-1} \leq 2^{-u_n} \leq 2^{-\frac{1}{2}} < 2^0 = 1$$

logo $u_{n+1} \in [1/2, 1]$. A propriedade é pois indutiva, logo verdadeira para todo o n.

Podemos então concluir, do enunciado da questão, que

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| = |2^{-u_{n+1}} - 2^{-u_n}| \leq \frac{1}{2}|u_n - u_{n+1}|$$

Verificam-se então as condições de um lema das aulas Teóricas que garante que u_n é uma sucessão de Cauchy (neste caso, com $\alpha = \frac{1}{2}$). Logo u_n é convergente para um valor l que verifica $l = 2^{-l}$. Ou seja, pela unicidade de solução para esta equação, $l = x_0$.

Fim