Justifique as suas respostas e apresente os cálculos efectuados.
Mude de folha quando mudar de grupo.

Grupo 1

Na folha de resposta do Grupo 1 indique, para cada item, qual a opção correcta.
Apresente os resultados na forma de uma grelha.

(Resposta correcta: 1,2 valores. Resposta errada com elementos justificativos: 0 valores. Resposta errada sem elementos justificativos: (-0,4) valores.)

1. Qual a fórmula da derivada da função $g(x) = \arctan(e^x)$?

- (a) $\frac{1}{1+e^{2x}}$ (b) $\frac{e^x}{\cos^2(e^x)}$ (c) $\frac{1}{e^{-x}+e^x}$ (d) $\frac{e^x}{1+x^2}$

2. Considere uma função h , definida em $\mathbb{R}$, duas vezes diferenciável e tal

$$h''(x) = (x-1)^2 \cdot x$$

Podemos afirmar que:

- (a) O gráfico de h não tem pontos de inflexão.
(b) O gráfico de h tem uma inflexão no ponto de abcissa $x = 0$.
(c) O gráfico de h tem uma inflexão no ponto de abcissa $x = 1$.
(d) O gráfico de h tem dois pontos de inflexão distintos.

3. Considere a função $v : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que $v(0) = 0$ e $v(x) = x \cdot \ln(|x|)$ se $x \neq 0$. Podemos afirmar que:

- (a) v não é contínua em $x = 0$. (b) v é diferenciável mas não é contínua em $x = 0$.
(c) v não é diferenciável em $x = 0$. (d) v é contínua e diferenciável em $x = 0$.

4. Seja $f : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}$ uma função real de variável real contínua, diferenciável em $] -1, 1[$. Admita que $f(-1) = f(1)$ e que $f'(0) = 2$. Os teoremas de Rolle e Darboux permitem-nos afirmar que:

- (a) Existe $c \in] -1, 0[$ tal que $f'(c) < 0$. (b) Existe $c \in]0, 1[$ tal que $f'(c) < 0$.
(c) Existe $c \in] -1, 1[$ tal que $f'(c) = 1$. (d) Existe $c \in] -1, 1[$ tal que $f''(c) > 0$.

5. Considere a função $w : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida por $w(x) = kx - \sin(2x)$ em que k é um parâmetro real. Qual o conjunto de valores de k para os quais w é estritamente crescente?

- (a) $\mathbb{R}^+$ (b) $[2, +\infty[$ (c) $]2, +\infty[$ (d) $[1, +\infty[$

(Continua no verso)

Grupo 2 (Mude de folha)

Considere a função $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x \cdot (\ln(x+1) - \ln(x))$.

[1.0] (a) Verifique que

$$f'(x) = \ln(x+1) - \ln(x) - \frac{1}{x+1}$$

Resposta: Aplicando a regra da derivação do produto, obtemos

$$f'(x) = 1 \cdot (\ln(x+1) - \ln(x)) + x \cdot \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \right) = \ln(x+1) - \ln(x) - x \cdot \frac{1}{x(x+1)} = \ln(x+1) - \ln(x) - \frac{1}{x+1}$$

[2.0] (b) Seja $x > 0$. Utilizando o Teorema de Lagrange no intervalo $[x, x+1]$, prove que

$$\ln(x+1) - \ln(x) > \frac{1}{x+1}$$

O que pode concluir quanto à monotonia da função f ?

Resposta: Consideramos a função $t \mapsto \ln(t)$ no intervalo $[x, x+1]$ com $x > 0$. A função considerada é contínua em $[x, x+1]$ e é diferenciável em $]x, x+1[$, pelo que estão reunidas as condições do Teorema de Lagrange. Aplicando este teorema, obtemos

$$\frac{\ln(x+1) - \ln(x)}{x+1-x} = \frac{1}{c} \quad \text{para certo } c \in]x, x+1[$$

Concluimos, do facto $x < c < x+1$ e do decrescimento estrito da função $t \mapsto \frac{1}{t}$ em $\mathbb{R}^+$, que

$$\ln(x+1) - \ln(x) > \frac{1}{x+1}$$

Em particular, a função f , definida na alínea anterior, verifica

$$f'(x) > 0 \quad \forall x > 0$$

pelo que é estritamente crescente.

[2.0] (c) Estude $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Resposta: Para $x > 0$, escrevemos

$$f(x) = x \cdot (\ln(x+1) - \ln(x)) = x \cdot \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln\left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]$$

Posto que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

concluimos que o limite estudado é igual a 1.

Alternativamente, podemos escrever

$$f(x) = \frac{\ln(x+1) - \ln(x)}{\frac{1}{x}}$$

O estudo do limite do segundo membro em $+\infty$ cumpre as condições do Teorema da Regra de Cauchy. Em particular, numerador e denominador tendem para zero em $+\infty$. Aplicando esta regra, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{x(x+1)}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

Grupo 3 (Mude de folha)

- [3.0] (a) Escreva a fórmula de Taylor de ordem 1 em $x = 0$ da função $\cosh(x)$, com resto de Lagrange, e conclua que, se $x \neq 0$,

$$\cosh(x) > 1 + \frac{x^2}{2}$$

(recorde: $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; $\cosh^2(x) = 1 + \sinh^2(x)$)

Resposta: Recordamos a fórmula de Taylor de ordem 1 com resto de Lagrange em $x = a$:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(c)}{2!}(x - a)^2$$

em que c está compreendido entre a e x .

Temos

$$\cosh'(x) = \sinh(x), \quad \cosh''(x) = \cosh(x)$$

logo

$$\cosh(x) = \cosh(0) + \sinh(0)x + \frac{\cosh(c)}{2!}x^2 = 1 + \frac{\cosh(c)}{2!}x^2$$

Em particular, como $c \neq 0$

$$\cosh(c) = \sqrt{1 + \sinh^2(c)} > 1$$

logo, posto que $x^2 > 0$,

$$\cosh(x) > 1 + \frac{1}{2}x^2$$

- [2.0] (b) Sejam a e b números reais tais que $0 < a < b$. Prove que existe $c \in]a, b[$ tal que

$$\frac{e^b - e^a}{\ln(b) - \ln(a)} = c \cdot e^c$$

Resposta: as funções $f(x) = e^x$ e $g(x) = \ln(x)$ verificam as condições do Teorema de Cauchy no intervalo $[a, b]$. Em particular, $g'(x) = \frac{1}{x} \neq 0$ se $x \in]a, b[$. Temos então, por este teorema, que, para um certo $c \in]a, b[$,

$$\frac{e^b - e^a}{\ln(b) - \ln(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{e^c}{c^{-1}} = ce^c$$

Grupo 4 (Mude de folha)

Considere a função $g : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ definida por $g(t) = e^{-t}$. Dado $P = (x, e^{-x})$ um ponto no gráfico de g e seja r a recta tangente ao gráfico de g no ponto P . A recta r intersecta o eixo das ordenadas e o eixo das abcissas nos pontos Q e R respectivamente. Denotamos por A a área do triângulo OQR , em que O é a origem do referencial.

- [2.0] (a) Verifique que a área A do triângulo OQR é dada, em função da abscissa x do ponto P , por

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{-x} \cdot (x + 1)^2 \quad (x > 0)$$

Resposta: A equação da recta r , tangente ao gráfico de f no ponto (x, e^{-x}) é dada por

$$y(t) = -e^{-x}(t - x) + e^{-x} = -e^{-x}t + e^{-x}(1 + x)$$

A recta r intersecta o eixo das ordenadas no ponto $Q = (0, y(0)) = (0, e^{-x}(1+x))$ e intersecta o eixo das abcissas no ponto $R = (t_0, 0)$ em que

$$-e^{-x}t_0 + e^{-x}(1+x) = 0 \quad \text{ou} \quad t_0 = (1+x)$$

A área do triângulo OQR é pois

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot t_0 \cdot y(0) = \frac{1}{2} \cdot (1+x) \cdot (1+x)e^{-x} = \frac{1}{2} \cdot e^{-x} \cdot (x+1)^2$$

[2.0] (b) Justifique que $A(x)$ atinge um máximo num único ponto x_{max} .

Resposta: Derivando, obtemos, para $x > 0$,

$$A'(x) = -\frac{1}{2} \cdot e^{-x} \cdot (x+1)^2 + \frac{1}{2} e^{-x} \cdot 2(x+1) = \frac{1}{2} e^{-x}(x+1) \cdot (-x-1+2) = \frac{1}{2} e^{-x}(x+1) \cdot (-x+1)$$

Posto que

$$\frac{1}{2} e^{-x}(x+1) > 0 \quad \text{para} \quad x > 0,$$

o sinal de A' é determinado pelo sinal da expressão $-x+1$. Ou seja, $A'(x) > 0$ se $x \in]0, 1[$ e $A'(x) < 0$ se $x > 1$. Por um corolário do Teorema de Lagrange, concluímos que A é estritamente crescente em $]0, 1[$ e estritamente decrescente em $[1, +\infty[$. Logo A atinge o seu máximo num único ponto $x_{max} = 1$.

Fim