

Justifique as suas respostas e apresente os cálculos efectuados.
Mude de folha quando mudar de grupo.

Grupo 1

Na folha de resposta do Grupo 1 indique, para cada item, qual a opção correcta.
Apresente os resultados na forma de uma grelha.

(Resposta correcta: 1,2 valores. Resposta errada com elementos justificativos: 0 valores. Resposta errada sem elementos justificativos: (-0,4) valores.)

1. Qual o valor de $\int_{e^{-1}}^e \frac{1}{x} dx$?

- (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) $2 \cdot e$

2. Seja $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ uma função contínua e decrecente. Considere a partição $P = \{0, 1/2, 1\}$. Qual o valor de $\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P)$?

- (a) $f(1) + f(1/2)$ (b) $(f(1) - f(0))/2$ (c) $f(0) - f(1/2)$ (d) $(f(0) - f(1))/2$

3. Considere uma função F , de variável real, cujos valores são determinados pela expressão $\int_0^{e^x} \frac{1}{1-t^4} dt$. Qual das seguintes funções poderá ser a sua derivada?

- (a) $f_1 :]0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \frac{e^x}{1 - e^{4x}}$ (b) $f_2 :]-\infty, 0[\mapsto \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \frac{e^x}{1 - e^{4x}}$

- (c) $f_3 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \quad f_3(x) = \frac{1}{1 - e^{4x}}$ (d) $f_4 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{R}, \quad f_4(x) = \frac{1}{1 - e^{4x}}$

4. Considere a elipse C de equação $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Seja r a recta que passa no foco da elipse $(-4, 0)$ e no vértice $(0, 3)$. Qual das seguintes expressões permite calcular a área do sector elíptico limitado inferiormente pelo eixo das abcissas e limitado superiormente pela recta r (no segundo quadrante) e pela elipse C (no primeiro quadrante)?

- (a) $12 + 3 \cdot \int_0^5 \sqrt{1 - x^2/25} dx$ (b) $\int_{-4}^5 \frac{3}{4}(x+4) - 3 \cdot \sqrt{1 - x^2/25} dx$

- (c) $6 + 3 \cdot \int_0^5 \sqrt{1 - x^2/25} dx$ (d) $3 \cdot \int_{-4}^5 \sqrt{1 - x^2/25} dx$

5. Seja $f : [0, \pi] \mapsto \mathbb{R}$ uma função diferenciável, com derivada contínua em $[0, \pi]$.

Considere $I = \int_0^\pi \cos(2x)f(x) dx$.

Uma integração por partes e a desigualdade triangular permitem afirmar que:

- (a) $|I| \leq \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^\pi f'(x) dx$ (b) $|I| \geq \frac{\pi}{2} \cdot \min_{x \in [0, \pi]} |f'(x)|$

- (c) $|I| \leq \frac{1}{2} \cdot \max_{x \in [0, \pi]} |f'(x)|$ (d) $|I| \leq \frac{\pi}{2} \cdot \max_{x \in [0, \pi]} |f'(x)|$

Grupo 2 (Mude de folha)

- [2,5] (a) Deduza os coeficientes a, b e c tais que

$$f(x) := \frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1} \quad (x > 0)$$

Determine a primitiva F de f que verifica $F(1) = \ln(2)$.

Resposta: Multiplicamos a equação por $x^2(x+1)$ e deduzimos

$$1 = a(x(x+1)) + b(x+1) + cx^2$$

ou

$$1 = (a+c)x^2 + (a+b)x + b$$

Concluimos $b = 1$, $a = -1$ e $c = 1$. Posto que $x > 0$, obtemos, por primitivação,

$$\int f(x) dx = \int -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1} dx = -\ln(x) - \frac{1}{x} + \ln(x+1) + c$$

A condição $F(1) = \ln(2)$, implica

$$-\ln(1) - 1 + \ln(2) + c = \ln(2)$$

pelo que $c = 1$.

- [2,5] (b) Utilizando uma primitivação por partes cíclica, calcule $\int \cos(x) \sinh(x) dx$.

(recorde: $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$ e $\int \sinh(x) dx = \cosh(x) + c$)

Resposta: Temos $\int \cos(x) \sinh(x) dx =$

$$\cos(x) \cosh(x) - \int (-\sin(x)) \cosh(x) dx = \cos(x) \cosh(x) + \sin(x) \sinh(x) - \int \cos(x) \sinh(x) dx$$

Resolvendo a equação em ordem à primitiva, concluimos que

$$\int \cos(x) \sinh(x) dx = \frac{1}{2} \cdot (\cos(x) \cosh(x) + \sin(x) \sinh(x)) + c$$

Grupo 3 (Mude de folha)

Pretende-se calcular o integral impróprio $I = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2 + e^x + 2e^{-x}} dx$.

- [2,5] (a) Utilize a mudança de variável $e^x = t$ para mostrar que

$$\int_{-L}^0 \frac{1}{2 + e^x + 2e^{-x}} dx = \int_{e^{-L}}^1 \frac{1}{1 + (1+t)^2} dt$$

em que $L > 0$.

Resposta: Considerando $e^x = t$ temos

$$x(t) = \ln(t) \quad \text{e} \quad x'(t) = \frac{dx}{dt} = 1/t$$

O extremo de integração $x = -L$ é convertido no extremo $t = e^{-L}$ e o extremo de integração $x = 0$ converte-se em $t = 1$. Podemos então escrever

$$\int_{-L}^0 \frac{1}{2 + e^x + 2e^{-x}} dx = \int_{e^{-L}}^1 \frac{1}{2 + t + 2t^{-1}} \cdot \frac{1}{t} dt = \int_{e^{-L}}^1 \frac{1}{2t + t^2 + 2} dt = \int_{e^{-L}}^1 \frac{1}{1 + (t+1)^2} dt$$

- [2,5] (b) Calcule o integral $\int_0^1 \frac{1}{1+(1+t)^2} dt$ e conclua sobre o valor de I .

Resposta:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+(1+t)^2} dt = [\arctan(1+t)]_0^1 = \arctan(2) - \arctan(1) = \arctan(2) - \frac{\pi}{4}$$

Observe agora que, pela definição de integral impróprio e pela alínea anterior,

$$I = \lim_{L \rightarrow +\infty} \int_{-L}^0 \frac{1}{2+e^x+2e^{-x}} dx = \lim_{L \rightarrow +\infty} \int_{e^{-L}}^1 \frac{1}{1+(t+1)^2} dt = \int_0^1 \frac{1}{1+(1+t)^2} dt$$

sendo o valor do último membro $\arctan(2) - \frac{\pi}{4}$.

Grupo 4 (Mude de folha)

- [2,0] (a) Seja $h > 0$. Mostre que o volume V do sólido gerado por revolução em torno do eixo dos x da região delimitada pelo gráfico da função

$$f : [0, h] \mapsto \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x}$$

$$\text{é dado por } V(h) = \frac{\pi \cdot h^2}{2}. \quad (\text{recorde: } V_x = \int_a^b \pi f^2(x) dx)$$

Resposta: De acordo com a fórmula dada nas aulas teóricas, temos

$$\int_0^h \pi \cdot (\sqrt{x})^2 dx = \int_0^h \pi \cdot x dx = [\pi \cdot x^2/2]_0^h = \frac{\pi \cdot h^2}{2}$$

- [2,0] (b) Admita que o sólido descrito na alínea anterior é um recipiente que está a ser repleto de água (o eixo de rotação do recipiente encontra-se na vertical e a base coincide com a origem do referencial). Sabemos que o volume de água no recipiente num instante t verifica

$$V(t) = \int_0^t g(s) ds \quad (t \geq 0)$$

em que $g(t)$ é o débito do abastecimento de água no instante t .

Admita que $h(t)$, a altura do nível da água medida no instante t , é $h(t) = \sqrt{\frac{t}{\pi}}$. Calcule o débito $g(t)$.

Resposta: De acordo com a fórmula estabelecida na alínea anterior, o volume contido no recipiente no instante t é

$$V(t) = \frac{\pi \cdot h(t)^2}{2}$$

em que $h(t)$ é a altura da água no instante t . A condição $h(t) = \sqrt{\frac{t}{\pi}}$ determina

$$V(t) = \frac{\pi \cdot \frac{t}{\pi}}{2} = \frac{t}{2}$$

Finalmente, resulta da relação estabelecida entre o volume V e o débito g , por aplicação do Teorema Fundamental do Cálculo,

$$g(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t g(s) ds = \frac{d}{dt} V(t) = \frac{1}{2}$$

pelo que o débito é constante e igual a $1/2$ (unidades de volume por unidade de tempo).

Fim