FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Exame Final de ***Análise Matemática 1***
14 de Julho 2020
Duração: 3h30

Escreva nome e nº de aluno em cada página manuscrita.
Grupos de resolução diferentes devem ser enviados em ficheiros diferentes.
Justifique as suas respostas e apresente os cálculos efectuados.

Grupo 1

Nos grupos 1,4 e 6 indique, para cada item, qual a opção correcta.
Inclua elementos justificativos. Apresente os resultados na forma de uma grelha.

(*Resposta correcta com elementos justificativos:* 1,0 *valores. Resposta errada ou sem elementos justificativos:* 0 *valores.*)

1. Indique o derivado A' do conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \quad 0 \le x \le 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : \quad x = (1 + 1/n)^n \quad n \in \mathbb{N}\}$$

(a) $\emptyset$ **(b)** $[0,1] \cup \{e\}$ **(c)** $\{0, 1, e\}$ **(d)** $[0,1]$

2. Qual das seguintes sucessões é de Cauchy?

(a) $u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$ **(b)** $v_n = (n+1)^2 - n^2$ **(c)** $z_n = n^{\frac{2}{3}}$ **(d)** $w_n = (1 + (-1)^n) \cdot n$

Grupo 2 (Mude de folha)

Considere a função $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \mapsto \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{\cosh(x) - 1}{x}$. (recorde: $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$)

[1,0] **(a)** Verifique que

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{e^x - 1}{x} - \frac{e^{-x} - 1}{(-x)} \right)$$

e, recorrendo a um limite notável da função exponencial, mostre que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

[1,5] **(b)** Sabendo que $e^x > 1 + x + x^2$ para $x > 0$, mostre que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Utilize o Teorema de Bolzano e a alínea anterior para justificar que a equação $f(x) = 1001$ tem, pelo menos, uma solução positiva.

Grupo 3 (Mude de folha)

Considere a sucessão definida por

$$u_n = 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

[1,5] **(a)** Prove por indução que

$$u_n \le 2 - \frac{1}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

[1,0] **(b)** Justifique que $u_n < u_{n+1}$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Utilizando a alínea anterior, estude a existência de limite para (u_n) indicando um majorante para o limite, caso exista.

(Continua na página seguinte)

Grupo 4 (Mude de folha)

Recorde: apresente os resultados na forma de uma grelha.

1. Sabendo que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $x = 0$, que $g(0) = g'(0) = -1$, indique o valor de

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g^3(x) - g^3(0)}{x}$.

(a) -3 **(b)** 0 **(c)** 3 **(d)** $+\infty$

2. Qual o polinómio de Taylor de ordem 2 no ponto $x = \pi/4$ da função $\tan(x)$?
(recorde: $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$)

(a) $1 + 2(x - \pi/4)$ **(b)** $1 + 2(x - \pi/4) + 2(x - \pi/4)^2$

(c) $1 + (x - \pi/4) + 2(x - \pi/4)^2 + 3(x - \pi/4)^3$ **(d)** $1 + x + x^2$

Grupo 5 (Mude de folha)

[1,5] **(a)** Mostre que a fórmula de Taylor de ordem 1 com resto de Lagrange no ponto $a = 0$ da função $\arccos(x)$ é dada por

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{c}{(1-c^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{x^2}{2} \qquad (x \in [-1, 1])$$

O que podemos afirmar sobre o valor c presente na expressão?

[1,5] **(b)** Usando a alínea anterior, calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arccos(x) - \frac{\pi}{2} + x}{x^2}$$

Grupo 6 (Mude de folha)

Recorde: apresente os resultados na forma de uma grelha.

1. A mudança de variável $x = \tan(t)$ permite-nos concluir que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx$ é igual a:

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2(t)}\, dt$ **(b)** $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{1+\tan^2(t)}\, dt$

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+\tan^2(t))^2}\, dt$ **(d)** $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{(1+\tan^2(t))^2}\, dt$

(Continua na página seguinte)

2. Considere a função $F :]0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$, definida por $F(x) = \displaystyle\int_1^{\sqrt{x}} \cos(t^2)\, dt$.

Qual das seguintes expressões é igual a $F'(x)$?

(a) $\cos(x)$ **(b)** $\sqrt{x} \cdot \cos(x)$

(c) $\dfrac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos(x)$ **(d)** $x \cdot \cos(x^2)$

Grupo 7 (Mude de folha)

[1,5] **(a)** Calcule $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} e^{\sqrt{1+x^2}}\, dx$.

(Observe que a função integranda tem uma primitiva imediata)

[1,5] **(b)** Determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que

$$\frac{-1}{x^3 - 2x^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x-2}$$

e calcule a primitiva de $\dfrac{-1}{x^3 - 2x^2}$ definida em $]0, 2[$ que se anula em $x = 1$.

Grupo 8 (Mude de folha)

[1,5] **(a)** Seja $f : [0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $|f(x)| \leq 1$ para todo o $x \geq 0$. Mostre que o integral impróprio $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x)\, dx$ é absolutamente convergente.

[1,5] **(b)** Fazendo $u' = e^{-x}$ e $v = \sin(x)$ no integral do primeiro membro, utilize uma integração por partes para mostrar que

$$\int_0^{n\pi} e^{-x} \sin(x)\, dx = \int_0^{n\pi} e^{-x} \cos(x)\, dx \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Tendo em conta o resultado da alínea anterior, mostre que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin(x)\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(x)\, dx$$

Fim