FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Correcção Exame Final de ***Análise Matemática 1***
14 de Julho 2020
Duração: 3h30

Escreva nome, nº de aluno e curso em cada folha.
Cada grupo de resolução deverá ser enviado num ficheiro separado.
Justifique as suas respostas e apresente os cálculos efectuados.

Grupo 1

Indique, para cada item, qual a opção correcta.
Apresente os resultados na forma de uma grelha.

(*Resposta correcta com elementos justificativos:* $1,0$ *valores. Resposta errada ou sem elementos justificativos:* 0 *valores.*)

1. Indique o derivado A' do conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \quad 0 \leq x \leq 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : \quad x = (1 + 1/n)^n \quad n \in \mathbb{N}\}$$

(a) $\emptyset$ **(b)** $[0,1] \cup \{e\}$ **(c)** $\{0, 1, e\}$ **(d)** $[0,1]$

Exemplo de elemento justificativo: definição de ponto de acumulação; identificação do limite da sucessão $(1 + 1/n)^n$.

2. Qual das seguintes sucessões é de Cauchy?

(a) $u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$ **(b)** $v_n = (n+1)^2 - n^2$ **(c)** $z_n = n^{\frac{2}{3}}$ **(d)** $w_n = (1 + (-1)^n) \cdot n$

Exemplo de elemento justificativo: referir equivalência entre sucessão de Cauchy e convergência. Alternativamente, cálculo do limite de $\ln(n+1) - \ln(n) = \ln(1 + 1/n)$

Grupo 2 (Mude de folha)

Considere a função $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \mapsto \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{\cosh(x) - 1}{x}$ (recorde: $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$).

[1,0] **(a)** Verifique que $f(x) = \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{e^x - 1}{x} - \dfrac{e^{-x} - 1}{(-x)} \right)$ e, recorrendo a um limite notável da função exponencial, mostre que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

Resposta:

(i) Temos

$$f(x) = \frac{\cosh(x) - 1}{x} = \frac{(e^x + e^{-x})/2 - 1}{x} = \frac{(e^x + e^{-x}) - 2}{2x} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{e^x - 1}{x} - \frac{e^{-x} - 1}{(-x)} \right)$$

(ii) e pelo limite notável $\lim_{y \to 0}(e^y - 1)/y = 1$, temos

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} - \frac{e^{-x} - 1}{(-x)} = 1 - 1 = 0$$

[1,5] **(b)** Sabendo que $e^x > 1 + x + x^2$ para $x > 0$, mostre que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Utilize o Teorema de Bolzano e a alínea anterior para justificar que a equação $f(x) = 1001$ tem, pelo menos, uma solução positiva.

Resposta:

(i) Temos $\dfrac{\cosh(x) - 1}{x} > \dfrac{1 + x + x^2/2 - 1}{x}$

(ii) Daqui resulta

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \geq \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + x + x^2/2 - 1}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{x}{2} = +\infty$$

(iii) Como $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, existem $0 < a < b$ tal que $f(a) < 1001 < f(b)$. Tendo em conta que f é contínua em $[a, b]$, a afirmação resulta da aplicação do Teorema de Bolzano a f restrita ao intervalo $[a, b]$.

Grupo 3 (Mude de folha)

Considere a sucessão definida por

$$u_n = 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$$

[1,5] **(a)** Prove por indução que

$$u_n \leq 2 - \frac{1}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

(i) O método de indução consiste em verificar a base de indução $(1 \leq 2 - 1)$ e que a propriedade é indutiva, ou seja que a hipótese de veracidade para a afirmação indexada em n garante a veracidade da afirmação indexada em $(n + 1)$.

(ii) Supondo que a propriedade é verdadeira para n, escrevemos

$$u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)!}$$

(iii) Verifica-se

$$-\frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)!} \leq -\frac{1}{n+1}$$

pois

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(n+1)n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

logo $u_{n+1} \leq 2 - \dfrac{1}{n+1}$. Demonstrámos assim a indutividade da desigualdade. A veracidade da afirmação para $n = 1$ garante a sua veracidade para todo o $n \in \mathbb{N}$.

[1,0] **(b)** Justifique que $u_n < u_{n+1}$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Utilizando a alínea anterior, estude a existência de limite para (u_n) indicando, caso exista, um majorante para o limite.

Resposta:

(i) Temos $u_{n+1} - u_n = 1/(n+1)! > 0$ pelo que $u_{n+1} > u_n$. A afirmação é verdadeira.

(ii) A sucessão é pois monótona e, pela alínea anterior, limitada, sendo por isso convergente. Como $u_n \leq 2$ para todo o natural n, temos $\lim u_n \leq 2$.

Grupo 4 (Mude de folha)

Apresente os resultados na forma de uma grelha.

1. Sabendo que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $x = 0$, que $g(0) = g'(0) = -1$, indique o valor de

$$\lim_{x \to 0} \frac{g^3(x) - g^3(0)}{x}.$$

(a) -3 **(b)** 0 **(c)** 3 **(d)** $+\infty$

Exemplo de elemento justificativo: referir que o limite é o cálculo de $(g^3)'(x) = 3g^2(x)g'(x)$ em $x = 0$.

2. Qual o polinómio de Taylor de ordem 2 no ponto $x = \pi/4$ da função $\tan(x)$?
(recorde: $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$)

(a) $1 + 2(x - \pi/4)$ **(b)** $1 + 2(x - \pi/4) + 2(x - \pi/4)^2$

(c) $1 + (x - \pi/4) + 2(x - \pi/4)^2 + 3(x - \pi/4)^3$ **(d)** $1 + x + x^2$

Exemplo de elemento justificativo: cálculo dos coeficientes do polinómio de Taylor.

Grupo 5 (Mude de folha)

(a) Mostre que a fórmula de Taylor de ordem 1 com resto de Lagrange no ponto $a = 0$ da função $\arccos(x)$
[1,5] de ordem 1 com resto de Lagrange no ponto $a = 0$ é dada por

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{c}{(1 - c^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{x^2}{2} \qquad (x \in [-1, 1])$$

O que podemos afirmar sobre o valor c presente na expressão?

Resposta:

(i) Recordamos que a fórmula de Taylor de ordem 1 em $a = 0$ com resto de Lagrange de uma função f duas vezes diferenciável é

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(c) \cdot \frac{x^2}{2}$$

em que c está compreendido entre 0 e x.

(ii) Calculamos

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \text{e} \qquad \arccos''(x) = \left(-(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot (1 - x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2x)$$

(iii) Logo

$$\arccos(x) = \arccos(0) + \arccos'(0)x + \arccos''(c) \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{\pi}{2} - x - \frac{c}{(1-c^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{x^2}{2}$$

[1,5] **(b)** Usando a alínea anterior , calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arccos(x) - \frac{\pi}{2} + x}{x^2}$$

Resposta:

(i) Usando a alínea anterior, escrevemos

$$\frac{\arccos(x) - \frac{\pi}{2} + x}{x^2} = \frac{\frac{\pi}{2} - x - \frac{c}{(1-c^2)^{-\frac{3}{2}}}\frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{2} + x}{x^2} =$$

(ii) ou

$$= \frac{-c}{2(1-c^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(iii) Posto que c esta compreendido entre 0 e x, teremos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arccos(x) - \frac{\pi}{2} + x}{x^2} = \lim_{c\to 0} \frac{-c}{2(1-c^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

Grupo 6 (Mude de folha)

Apresente os resultados na forma de uma grelha.

1. A mudança de variável $x = \tan(t)$ permite-nos concluir que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$ é igual a:

<u>**(a)**</u> $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2(t)}\,dt$

(b) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{1+\tan^2(t)}\,dt$

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+\tan^2(t))^2}\,dt$

(d) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{(1+\tan^2(t))^2}\,dt$

Exemplo de elemento justificativo: Cálculo da mudança de variável no integral.

2. Considere a função $F :]0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$, definida por $F(x) = \displaystyle\int_1^{\sqrt{x}} \cos(t^2)\,dt$.

Qual das seguintes expressões é igual a $F'(x)$?

(a) $\cos(x)$

(b) $\sqrt{x} \cdot \cos(x)$

<u>**(c)**</u> $\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos(x)$

(d) $x \cdot \cos(x^2)$

Exemplo de elemento justificativo: Invocação do Teorema Fundamental do Cálculo ou da regra da derivada da função composta.

(Continua na página seguinte)

Grupo 7 (Mude de folha)

[1,5] **(a)** Calcule $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} e^{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

(sugestão: observe que a função integranda tem uma primitiva imediata)

Resposta:

(i) Temos

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} e^{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int_0^1 u'(x)e^{u(x)}\,dx \qquad \text{com} \quad u(x) = \sqrt{1+x^2}$$

(ii) Logo

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} e^{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \left[e^{\sqrt{1+x^2}}\right]_0^1$$

(iii) pelo que obtemos

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} e^{\sqrt{1+x^2}}\,dx = e^{\sqrt{2}} - e$$

[1,5] **(b)** Determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que

$$\frac{-1}{x^3-2x^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x-2}$$

e calcule a primitiva de $\displaystyle\frac{-1}{x^3-2x^2}$ definida em $]0,2[$ que se anula em $x=1$.

Resposta:

(i) Escrevemos

$$\frac{-1}{x^3-2x^2} = \frac{ax(x-2)+b(x-2)+cx^2}{x^2(x-2)} = \frac{(a+c)x^2+(b-2a)x-2b}{x^2(x-2)}$$

e deduzimos $b = 1/2$, $a = 1/4$ e $c = -1/4$.
Concluímos

$$\int \frac{-1}{x^3-2x^2}\,dx = \int \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{x-2}\,dx$$

(ii) Temos

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + c \quad \text{e} \quad \int \frac{1}{x-2} = \ln(|x-2|) + c$$

(iii) Pelo que

$$\int \frac{-1}{x^3-2x^2}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\ln(|x|) - \frac{1}{2}\cdot x^{-1} - \frac{1}{4}\ln(|x-2|) + c$$

em que a condição de anulamento em $x=1$ determina $c = 1/2$.

Grupo 8 (Mude de folha)

[1,5] **(a)** Seja $f : [0,+\infty[\mapsto \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $|f(x)| \le 1$ para todo o $x \ge 0$. Mostre que o integral impróprio $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x)\,dx$ é absolutamente convergente.

Resposta:

(i) Temos

$$\int_0^{+\infty} |e^{-x} f(x)|\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} |f(x)|\,dx$$

(ii) Logo, como $|f| \leq 1$,

$$\int_0^{+\infty} |e^{-x} f(x)|\,dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$$

(iii) Como $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ é finito, concluímos que I é absolutamente convergente.

[1,5] **(b)** Fazendo $u' = e^{-x}$ e $v = \sin(x)$ no integral do primeiro membro, utilize uma integração por partes para mostrar que

$$\int_0^{n\pi} e^{-x} \sin(x)\,dx = \int_0^{n\pi} e^{-x} \cos(x)\,dx \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Tendo em conta o resultado da alínea anterior, mostre que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin(x)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(x)\,dx$$

Resposta

(i) Utilizando a integração por partes indicada, temos

$$\int_0^{n\pi} e^{-x} \sin(x)\,dx = \left[-e^{-x} \sin(x)\right]_0^{n\pi} - \int_0^{n\pi} -e^{-x} \cos(x)\,dx$$

(ii) Como $\sin(n\pi) = \sin(0) = 0$, concluímos

$$\int_0^{n\pi} e^{-x} \sin(x)\,dx = \int_0^{n\pi} e^{-x} \cos(x)\,dx$$

(iii) Posto que $|\sin(x)| \leq 1$ e $|\cos(x)| \leq 1$, resulta da alínea anterior a convergência dos integrais impróprios considerados. Temos então

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{n\pi} e^{-x} \sin(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{n\pi} e^{-x} \cos(x)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(x)\,dx$$

Fim