FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

1.º Teste de ***Análise Matemática 1***
16 de Outubro 2019
Duração: 1h 30m

Justifique as suas respostas e apresente os cálculos efectuados.
Mude de folha quando mudar de grupo.

Grupo 1

Na folha de resposta do Grupo 1 indique, para cada item, qual a opção correcta.
Apresente os resultados na forma de uma grelha.

(*Resposta correcta:* $1,2$ *valores com elementos justificativos. Resposta errada ou sem elementos justificativos:* 0 *valores.*)

1. Considere o conjunto $A \subset \mathbb{R}$ definido por $A =]-\infty, 0[\cup \{1\}$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(a) 0 pertence à fronteira de A.
(b) A é limitado.
(c) 1 pertence ao derivado de A.
(d) A é aberto.

2. Qual o limite da sucessão $u_n = \dfrac{\sqrt{n + 2n^2}}{n + \sqrt{n}}$?

(a) 0
(b) 1
(c) $\sqrt{2}$
(d) $+\infty$

3. Considere a sucessão $v_n = \ln(1 + n)$. Indique qual das seguintes afirmações é falsa.

(a) (v_n) é monótona.
(b) (v_n) é uma sucessão de Cauchy.
(c) $\lim v_n = +\infty$.
(d) $\lim \dfrac{v_n}{n} = 0$

4. Considere a função bijectiva $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 2x + \sin(x)$. Sabendo que $g(0) = 0$, qual o valor de $(g^{-1})'(0)$, em que g^{-1} representa a inversa de g para a composição de funções?

(a) $\dfrac{1}{3}$
(b) 1
(c) 3
(d) π

5. Indique qual dos seguintes polinómios corresponde ao polinómio de Taylor de ordem 2, no ponto $a = 0$, da função $\arctan(x)$.

(a) $1 + x + \dfrac{x^2}{2}$
(b) x
(c) $x + \dfrac{x^2}{2}$
(d) $x - \dfrac{x^2}{2}$

(Continua no verso)

Grupo 2 (Mude de folha)

[3,0] **(a)** Considere a sucessão definida por recorrência

$$u_1 = 1\,, \quad u_{n+1} = \frac{2}{3} \cdot u_n + \frac{1}{9} \qquad \text{para todo o} \quad n \in \mathbb{N}$$

Prove, por indução que

$$u_n = \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Resposta:

(i) Temos que verificar a veracidade da afirmação para $n = 1$ e demonstrar que se a afirmação for verdadeira para n será verdadeira para $n + 1$.

(ii) Temos $u_1 = \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^1$ pelo que se verifica a base de indução.

(iii) Usando da hipótese de indução, temos

$$u_{n+1} = \frac{2}{3} \cdot u_n + \frac{1}{9} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) + \frac{1}{9}$$

(iv)

$$u_{n+1} = \frac{2}{9} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \frac{1}{9}$$

(v) ou seja

$$u_{n+1} = \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

pelo que a proriedade é verdadeira para todo o natural n.

[2,0] **(b)** Utilizando a alínea anterior, dado $\epsilon > 0$ indique um valor $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > p \qquad \Rightarrow |u_n - \frac{1}{3}| < \epsilon$$

O que pode concluir quanto à convergência de (u_n)?

Resposta:

(i) Resolvemos $|u_n - \frac{1}{3}| = |\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3}| = \left(\frac{2}{3}\right)^n < \epsilon$

(ii) $\ln\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n\right] = n \ln(2/3) < \ln(\epsilon)$

(iii) Tendo em conta que $\ln(2/3) < 0$,

$$n > \frac{\ln(\epsilon)}{\ln(2/3)}$$

pelo que podemos considerar como p um número natural maior ou igual ao segundo membro da inequação.

(iv) Concluímos que a sucessão cumpre a condição de convergência para o limite 0.

Grupo 3 (Mude de folha)

Considere a função $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \mapsto \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{\sinh(x)}{x}$.

[2,5] **(a)** Recordando que $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ verifique que

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{e^{-x} - 1}{-x}\right)$$

Recorra ao limite notável da função exponencial para mostrar que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. Justifique que f admite prolongamento por continuidade em $x = 0$ e defina o prolongamento.

Resolução:

(i) Temos

$$\frac{1}{2}\left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{e^{-x} - 1}{-x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{1 - e^{-x}}{x}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{e^x - e^{-x}}{x} = f(x)$$

(ii) Temos $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

(iii) Também temos $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{-x} - 1}{-x} = \lim_{y\to 0}\dfrac{e^y - 1}{y} = 1$

(iv) Pelo que $\lim_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{2}\cdot(1+1) = 1$

(v) Deste modo podemos concluir que a função $f(x)$ tem limite em $x = 0$ sendo este definido por

$$\overline{f}(x) = f(x) \quad \text{se} \quad x \neq 0\,, \qquad \overline{f}(0) = 1$$

[2,5] **(b)** Utilizando a desigualdade

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2} \qquad \text{se} \quad x > 0$$

estude $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Verifique que $f(x) = f(-x)$ e conclua sobre o limite de f em $-\infty$.

Resposta:

(i) Temos, para $x > 0$,

$$\frac{\sinh(x)}{x} = \frac{e^x - e^{-x}}{x} > \frac{1 + x + x^2/2 - e^{-x}}{x}$$

(ii) Temos $1 - e^{-x} > 0$ para $x > 0$ (ou alternativamente $(1 - e^{-x})/x$ tende para zero em $+\infty$)

(iii) Pelo que $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sinh(x)}{x} \geq \lim_{x\to+\infty}\dfrac{x + x^2/2}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 + x/2 = +\infty$.

(iv) Temos

$$f(x) = \frac{\sinh(x)}{x} = \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \frac{-(e^x - e^{-x})}{-2x} = \frac{e^{-x} - e^x}{2(-x)} = f(-x)$$

(v) Pelo que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Grupo 4 (Mude de folha)

[2,0] **(a)** Justifique que a fórmula de Taylor de ordem 1 com resto de Lagrange no ponto $a = 0$ da função $\arctan(e^x)$ é

$$\arctan(e^x) = \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} + \frac{e^c - e^{3c}}{2(1+e^{2c})^2}x^2$$

(dê uma informação relevante sobre a incógnita c presente na expressão)

Resposta:

(i) Recordamos a fórmula de Taylor solicitada

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(c)}{2!}x^2$$

em que c está estritamente compreendido entre 0 e x.

(ii) Temos $f(0) = \arctan(e^0) = \arctan 1 = \pi/4$;

(iii) Temos $f'(x) = \dfrac{e^x}{1+(e^x)^2} = \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$ pelo que $f'(0) = \frac{1}{2}$;

(iv) Temos $f''(x) = \left(\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}\right)' = \dfrac{e^x \cdot (1+e^{2x}) - e^x \cdot e^{2x}}{(1+e^{2x})^2} = \dfrac{e^x - e^{3x}}{(1+e^{2x})^2}$

e a fórmula apresentada resulta da simples substituição das expressões obtidas.

[2,0] **(b)** Utilize a igualdade anterior para determinar

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(e^x) - \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}}{x^2}$$

Resposta:

(i) Resulta da alínea anterior

$$\frac{\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} + \frac{e^c - e^{3c}}{2(1+e^{2c})^2}x^2 - \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}}{x^2}$$

(ii) o que simplifica na expressão

$$\frac{e^c - e^{3c}}{2(1+e^{2c})^2}$$

(iii) Tendo em conta que se x converge para zero, c converge para zero (Lema das Sucessões Enquadradas),

(iv) Concluímos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(e^x) - \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{c\to 0} \frac{e^c - e^{3c}}{2(1+e^{2c})^2} = \frac{0}{1} = 0$$

Fim