FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

2.º Teste de ***Análise Matemática 1***
18 de Junho 2020
Duração: 2h 00m

Escreva nome, nº de aluno e curso em cada folha.
Cada grupo de resolução deverá ser enviado num ficheiro separado.
Justifique as suas respostas e apresente os cálculos efectuados.

Grupo 1

Na folha de resposta do Grupo 1 indique, para cada item, qual a opção correcta.
Apresente os resultados na forma de uma grelha.

(*Resposta correcta com elementos justificativos:* 1,2 *valores. Resposta errada ou sem elementos justificativos:* 0 *valores.*)

1. Qual o valor de $\displaystyle\int_0^\pi x - \sin(x)\, dx$?

(a) 1 **(b)** $\dfrac{\pi^2}{2} - 2$ **(c)** 2 **(d)** $\dfrac{\pi^2}{2} + 2$

Exemplo de elemento justificativo: cálculo pela Regra de Barrow.

2. Seja $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x$. Considere a partição $P = \{0,\, 1/2,\, 1\}$. Qual o valor de $\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P)$?

(a) $e - 1$ **(b)** $(e-1)/2$ **(c)** $2 \cdot e^{\frac{1}{2}}$ **(d)** $(1-e)/2$

Exemplos de elemento justificativo: cálculo da expressão ou referência rigorosa às condições de aplicabilidade da proposição do texto teórico.

3. Considere a região no plano delimitada pelos gráficos das funções $f(x) = |x|$ e $g(x) = x^3$. Qual das seguintes expressões permite calcular o seu valor? *(sugestão: esboce os gráficos de f e g)*

(a) $\displaystyle\int_0^1 x^3 - x\, dx$ **(b)** $\displaystyle\int_{-1}^1 |x| - x^3\, dx$

(c) $\displaystyle\int_0^1 x - x^3\, dx$ **(d)** $\displaystyle\int_{-1}^1 x - x^3\, dx$

Exemplo de elemento justificativo: gráfico da região pretendida.

4. Considere uma função F, de variável real, definida por $\displaystyle\int_{-1}^x \frac{1}{t^2}\, dt$. Qual das seguintes funções poderá ser a sua derivada?

(a) $f_1 :]0,+\infty[\mapsto \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \dfrac{1}{x^2}$ **(b)** $f_2 :]-\infty, 0[\mapsto \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \dfrac{1}{x^2}$

(c) $f_3 :]0,+\infty[\mapsto \mathbb{R}, \quad f_3(x) = -\dfrac{2}{x^3}$ **(d)** $f_4 : \mathbb{R}\backslash\{0\} \mapsto \mathbb{R}, \quad f_4(x) = -\dfrac{1}{x}$

Exemplo de elemento justificativo: gráfico da função $1/(x^2)$ evidenciando assímptota vertical e com referência à não integrabilidade de f em $[-1,x]$ se $x > 0$.

5. Indique qual dos seguintes integrais impróprios é absolutamente convergente.

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right)\,dx$

(c) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x}\,dx$

Exemplo de elemento justificativo: Majoração do módulo da função integranda pela função $1/(x^2)$ e referência a resultado de convergência.

Grupo 2 **(Mude de folha)**

[2,5] **(a)** Deduza os coeficientes a, b e c tais que

$$f(x) := \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x^2+1} + \frac{2c\cdot x}{x^2+1} \qquad (x > -1)$$

e determine uma primitiva F de f.

Resolução:

(i) Escrevemos

$$\frac{3x^2+2x+1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{(a+2c)x^2+(b+2c)x+(a+b)}{(x+1)(x^2+1)}$$

(ii) e deduzimos

$$c = 1 \qquad b = 0 \qquad a = 1$$

(iii) Concluímos

$$\int \frac{a}{x+1}\,dx = a\ln(|x+1|) + k_1$$

(iv)

$$\int \frac{2c\cdot x}{x^2+1}\,dx = c\ln(x^2+1) + k_2$$

(v) Concluímos:

$$\int \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx = \ln(x+1) + \ln(x^2+1) + k \qquad (x > -1)$$

[2,5] **(b)** Enuncie a fórmula de primitivação por partes. Utilizando duas primitivações por partes, calcule a primitiva $x^2\cosh(x)\,dx$ que se anula em $x = 0$.

(recorde: $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$ e $\int \cosh(x)\,dx = \sinh(x) + c$)

Resolução:

(i) Recorda-se a fórmula de primitivação por partes

$$\int u'(x)v(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx$$

(ii)

$$\int x^2\cosh(x)\,dx = x^2\sinh(x) - \int 2x\sinh(x)\,dx =$$

(iii)

$$x^2 \sinh(x) - \left(2x\cosh(x) - \int 2\cosh(x)\,dx\right)$$

(iv)

$$x^2 \sinh(x) - 2x\cosh(x) + 2\sinh(x) + c$$

(v) O anulamento da primitiva em $x = 0$ determina

$$0^2 \sinh(0) - 2 \cdot 0 \cdot \cosh(0) + 2\sinh(0) + c = 0$$

ou seja $c = 0$.

Grupo 3 (Mude de folha)

Pretende-se calcular $I = \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_1^n \frac{1}{x + x\ln^2(x)}\,dx$.

[2,5] **(a)** Utilize a mudança de variável $x = e^t$ para mostrar que, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_1^n \frac{1}{x + x\ln^2(x)}\,dx = \int_0^{\ln(n)} \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

Resposta:

(i) A condição $x(t) = e^t$ implica $x'(t) = e^t$.

(ii) Temos que $e^t = 1$ implica que $t = 0$.

(iii) Da mesma forma $e^t = n$ implica $t = \ln(n)$.

(iv) Substituindo, obtemos

$$\int_1^n \frac{1}{x + x\ln^2(x)}\,dx = \int_0^{\ln(n)} \frac{1}{e^t + e^t(\ln(e^t))^2} \cdot e^t\,dt$$

(v) O que implica, após simplificação,

$$\int_1^n \frac{1}{x + x\ln^2(x)}\,dx = \int_0^{\ln(n)} \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

[2,5] **(b)** Calcule o integral impróprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ e utilize a alínea (a) para deduzir o valor de I. Resposta:

(i) Temos

$$\int_0^M \frac{1}{1+t^2}\,dt = [\arctan(t)]_0^M = \arctan(M) - \arctan(0)$$

(ii) Logo

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \lim_{M\to+\infty} \arctan(M) - 0$$

(iii) ou seja $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$.

(iv) Pela alínea anterior

$$I = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\ln(n)} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

(v) pelo que $I = \frac{\pi}{2}$.

Grupo 4 (Mude de folha)

[1,0] **(a)** Seja $r : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^+$ uma função contínua e tal que $r(0) = r(2\pi)$. A função vectorial

$$t \mapsto r(t) \cdot (\cos(t), \sin(t)), \quad t \in [0, 2\pi]$$

delimita uma região no plano cuja área é calculada por

$$A := \int_0^{2\pi} \frac{r^2(t)}{2}\,dt$$

Admita que $r(t)$ é a função constante $r \equiv 1$. Identifique a região delimitada por r e calcule a sua área utilizando a fórmula dada.

Resposta:

(i) Sendo $r \equiv 1$, a região delimitada é o círculo trigonométrico.

(ii) e o valor da sua área é $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\,dt = \pi$.

[3,0] **(b)** Nas condições da alínea (a), seja $r(t) = 1 - \cos(t)$ com $t \in [0, 2\pi]$ (a região delimitada tem forma de coração e a curva que a delimita é designada por "cardioide"). Utilize a relação $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$ para mostrar que

$$(1 - \cos(t))^2 = \frac{3}{2} - 2\cos(t) + \frac{1}{2}\cos(2t)$$

Deduza, usando a fórmula da alínea anterior, a área da região delimitada pela cardioide.

Resposta:

(i) Temos

$$(1 - \cos(t))^2 = 1 - 2\cos(t) + \cos^2(t) = 1 - 2\cos(t) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t) = \frac{3}{2} - 2\cos(t) + \frac{1}{2}\cos(2t)$$

(ii) Escrevemos

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{3}{4} - \cos(t) + \frac{1}{4}\cos(2t)\,dt$$

(iii) Temos $\displaystyle\int_0^{2\pi} -\cos(t)\,dt = [-\sin(t)]_0^{2\pi}$.

(iv) Temos $\displaystyle\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \cos(2t)\,dt = \left[\frac{1}{8}\sin(2t)\right]_0^{2\pi}$.

(v) Logo $\displaystyle\int_0^{2\pi} -\cos(t) + \frac{1}{4}\cos(2t)\,dt = 0.$

(vi) $\displaystyle A = \int_0^{2\pi} \frac{3}{4}\,dt = \frac{3\pi}{2}.$

Fim