1. BASES DE NUMERAÇÃO
   1.1. NUMEROS INTEIROS
      1.1.1. Base Binária
      1.1.2. Base Octal
      1.1.3. Conversão base decimal / Outras bases.
   1.2. NUMEROS FRACCIONÁRIOS
   1.3. CONVENÇÃO SEMI-LOGARITMICA

2. OPERAÇÕES ARITMÉTICAS
   2.1. Soma e Subtracção
   2.2. Representação em complementos
      2.2.1. Complementos na base 10
      2.2.2. Complementos na base 9
      2.2.3. Base binária
      2.2.4. Complemento de 2
      2.2.5. Complemento de 1.

3. ALGEBRA DE BOOLE
   3.1. Conceitos fundamentais
   3.2. Diagramas de Venn
   3.3. Funções E, OU, NÃO

1. Bases de Numeração

1.1. Numeros Inteiros

Considere-se um numero N escrito do modo que usualmente utilizamos (base 10).

$$Ex. \quad 127 = 7 + 20 + 100$$

Este numero poderá ser escrito na forma

$$a_0 \times 10^0 + a_1 \times 10^1 + a_2 \times 10^2$$

desde que se admita $a_i = 0, 1, 2, \ldots, 9$ ou seja, que a_i pode tomar todos os valores entre zero e o valor da base de numeração menos um; $(10 - 1 = 9)$.

$$127 = 7 \times 10^0 + 2 \times 10^1 + 1 \times 10^2$$

No caso geral de uma base $\underline{b}$, qualquer numero N poderá ser descrito nessa base sob a forma

$$N = \sum_{i=0}^{n} a_i \, b^i$$

em que $a_i = 0, 1, \ldots, (b-1)$ e $\underline{n}$ depende da dimensão do nº.

As bases sobre as quais nos debruçaremos com mais atenção, serão a decimal, a binária e a octal.

1.1.1. Base binária

$a_i = 0, 1$

$b = 2$

Considere-se o numero $N = 1 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^3$ que se poderá escrever na <u>base 2</u> do seguinte modo:

$$N_2 = 1011$$ e cujo valor decimal

será $1 + 2 + 8 = 11$.

1.1.2. Base Octal

A passagem de um numero escrito em base binária à base octal é imediata

Seja $N = 1011$ em que, como usual, o algarismo da direita é o menos significativo.

Reescrevamos o numero N juntando-lhe zeros não significativos, portanto à esquerda, de modo a obter um nº de algarismos multiplo de 3.

$$N_2 = 001 \quad 011$$

Escrevamos N_2 na sua forma desenvolvida:

$$N_2 = 1\times 2^0 + 1\times 2^1 + 0\times 2^2 + 1\times 2^3 + 0\times 2^4 + 0\times 2^5 =$$
$$= (1\times 2^0 + 1\times 2^1 + 0\times 2^2)\times(2^3)^0 + (1\times 2^0 + 0\times 2^1 + 0\times 2^2)\times(2^3)^1 =$$
$$= (011)_2 \times 8^0 + (001)_2 \times 8^1 =$$
$$= 3\times 8^0 + 1\times 8^1 = (13)_8$$
$$= 3 + 8 = 11_{10} \quad \text{como tinhamos visto.}$$

Como se pode ver, o maior numero que se pode escrever dentro de cada grupo de 3 simbolos é $(111)_2$, ou seja $\underline{7}$, o que está de acordo com o anteriormente referido, em que

$ai = 0, 1, 2, \ldots, (b-1)$ ou seja, neste caso em que $b = 8$ $\quad ai = 0, 1, 2, \ldots, 7$.

Resumindo: Para passar um nº da representação binária à representação octal, juntam-se zeros não significativos até termos um nº de simbolos multiplos de 3.

Cada um destes grupos de 3 simbolos binários corresponde a um dos ai da representação em octal.

1.1.3. Modo de conversão decimal/outra base

Já escrevemos o mesmo numero nas três bases: binária, octal e decimal.

$$1011_2 = 11_{10} = 13_8$$

O modo de conversão de um nº escrito na base 10 no seu correspondente em qualquer outra base, consiste em dividir o valor decimal pelo valor da nova base em que se pretende escrever o numero, até obter um quociente inferior à base.

Exemplo.

Base 8:

11 | 8
3 1

$\Rightarrow 11_{10} = 13_8$

Base 2:

11 | 2
1 5 | 2
1 2 | 2
0 1

$\Rightarrow 11_{10} = 1011_2$

Base 3:

11 | 3
2 3 | 3
0 1

$\Rightarrow 11_{10} = 102_3$

$$102_3 = 2 \times 3^0 + 0 \times 3^1 + 1 \times 2^3 = 2 + 0 + 9 = 11_{10}$$

1.2. Numeros fraccionários

Analisemos agora os nºs fraccionários.

Seja o nº N escrito na base 10:

$$N_{10} = 0.123 = 1 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2} + 3 \times 10^{-3}$$
$$= 0.1 + 0.02 + 0.003$$

Na base $\underline{b}$, um nº N será escrito sob a forma:

$$N_b = a_1 \times b^{-1} + a_2 b^{-2} + \ldots + a_i b^{-i}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i b^{-i} \qquad \text{em que} \quad a_i = 0, 1, \ldots, (b-1)$$

Por exemplo, o nº $N_2 = 0.101$ é equivalente a

$$N_{10} = 1 \times 2^{-1} + 0 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} = \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$
$$= 0.625_{10}$$

A conversão de um nº decimal menor que um e maior que zero em binário, pode ser conseguida utilizando o artifício de ir multiplicando (e dividindo simultâneamente) o nº por potências de 2.

$$0.625 \times 2 \times \frac{1}{2} = 1.250 \times 2^{-1} = 1 \times 2^{-1} + 0.250 \times 2^{-1}$$

$$0.250 \times 2 \times \frac{1}{2} = 0.5 \times 2^{-1}$$

$$0.5 \times 2 \times \frac{1}{2} = 1.0 \times 2^{-1}$$

portanto:

$$0.625 = 1 \times 2^{-1} + (0.5 \times 2^{-1})\, 2^{-1} = 1 \times 2^{-1} + (1 \times 2^{-1}) \times 2^{-1} \times 2^{-1} =$$
$$= 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-3} \equiv 0.101_2$$

De um modo semelhante se pode obter a representação de um nº dado na base 10, em qualquer outra base $\underline{b}$.

Exemplo. Seja a base na qual pretendemos obter a representação, $b = 8$.

1) $N_{10} = 0.625 = 0.625 \times 8 \times \frac{1}{8} = 5.0 \times \frac{1}{8} = 5 \times 8^{-1}$

$N_{10} = 0.625_{10} = 0.5_8$

2) $N_{10} = 0.124_{10} = 0.124 \times 8 \times \frac{1}{8} = 0.992 \times 8^{-1}$

$0.992 \times 8 \times \frac{1}{8} = 7.936 \times 8^{-1} = 7 \times 8^{-1} + 0.936 \times 8^{-1}$

$0.936 \times 8 \times \frac{1}{8} = 7.488 \times 8^{-1} = 7 \times 8^{-1} + 0.488 \times 8^{-1}$

ou seja:
$$\begin{aligned} N_{10} = 0.124 &= \left(7 \times 8^{-1} + 7 \times 8^{-2} + 0.488 \times 8^{-2}\right) \times 8^{-1} \\ &= 7 \times 8^{-2} + 7 \times 8^{-3} + 0.488 \times 8^{-3} \\ &= \underbrace{0.0770}_{[1]} + \underbrace{0.488 \times 8^{-3}}_{[2]} \end{aligned}$$

[1] é a representação de N na base 8, desprezando [2], conforme se pode confirmar calculando:

$$0.077 + 0.488 \times \frac{1}{8^3} = 7 \times \frac{1}{8^2} + 7 \times \frac{1}{8^3} + 0.488 \times \frac{1}{8^3} =$$

$$= \frac{56 + 7 + 0.488}{8^3} = 0.124$$

Ao representar o nº 0.124_{10} pelo nº 0.077 na base 8 estamos a realizar uma aproximação a três casas, ou seja, a desprezar 0.488×8^{-3}.

1.3. Convenção Semi Logarítmica

Em qualquer sistema de numeração pode-se utilizar uma convenção tal que um nº seja escrito sob a forma

$$X = a \times b^n$$

em que $\frac{1}{b} \leq a < 1$, com $\underline{n}$ inteiro e b, a base de numeração.

No caso decimal $1 > a \geq 0.1$ e $b = 10$

$$X = a \cdot 10^n$$

Como "a" começa sempre por um zero e uma vírgula, pode-se admitir que não é necessário escrevê-los quando se trabalha sob esta forma. A base "b" (neste caso $b = 10$) sendo conhecida, também é implícita. Resta o inteiro $\underline{n}$ que é necessário definir.

Então, o nº X será representado pela mantissa "a" e pelo expoente "n". Assim, num computador utilizando esta convenção, há que reservar um certo nº de "bits" para "a" e outros para "n".

2.- Operações aritméticas.

2.1 — Operação soma e subtracção.

As operações aritméticas podem ser efectuadas em diferentes bases de numeração e seguindo processos série, paralelo e mistos.

Comecemos por definir tábuas de adição e subtracção utilizando a base binária uma vez que estas são já familiares em base decimal.

. Tomem-se dois números de um bit apenas $A = a_0 2^0$ e $B = b_0 2^0$ (em que $a_0 = 0$ ou 1 e $b_0 = 0$ ou 1)

Tabela da soma

A	B	S	C
0	0	0	0
1	0	1	0
0	1	1	0
1	1	0	1

Tabela da subtracção

A	B	D	C
0	0	0	0
1	0	1	0
0	1	1	1
1	1	0	0

Utilizando estas tabelas podem-se executar quaisquer somas e subtracções utilizando números positivos.

Como adiante se verá, é conveniente converter as subtracções em somas realizando modificações no código utilizado uma vez que isso permitirá a utilização do mesmo dispositivo electrónico para as fazer.

Convém ainda introduzir um somador que dê conta de um possível sinal de transporte ("e vai") vindo da operação precedente.

$A_i = a_{oi}\, 2^{i} \quad B_i = b_{oi}\, 2^{i} \quad C_i = c_{oi} \cdot 2^{i}$

A_i	B_i	C_i	S_i	C_{i+1}
0	0	0	0	0
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

C_i é o sinal de transporte (carry) de operação precedente e C_{i+1} é o "carry" para a próxima operação.

Exemplo:

Soma : $(7)_{10} + (5)_{10} = (12)_{10} \iff (111)_2 + (101)_2 = (1100)_2$

ou seja

$$\begin{array}{r} 111 \\ 101 \\ \hline 1100 \end{array}$$

carry → 1

Subtracção $(7)_{10} - (5)_{10} = (2)_{10} \iff (111)_2 - (101)_2 = (010)_2$

$$\begin{array}{r} 111 \\ 101 \\ \hline 010 \end{array}$$

A subtracção exemplificada 7-5 poderá ser convertida numa soma desde que exista uma representação codificada de números negativos $7 + (-5) = 2$

Esta necessidade leva-nos directamente à utilização de complementos de numeros de modo a poder definir o campo dos numeros negativos e as regras da sua operacionalidade.

2.2 - Representação em complementos

Abandone-mos provisoriamente a base dois e retomemos a base 10 uma vez que esta nos é mais familiar do ponto de vista operativo.

· Considere-se um numero A composto por 5 digitos. Os 4 primeiros definem o modulo e o quinto consoante seja o ou (b-1) determina o seu sinal positivo ou negativo

Exemplo:

$A = 0,\underline{0003}$

$B = 0,\underline{0127}$

sinal modulo

Esta definição implica que este comprimento de 5 digitos é fixo. Portanto o maior numero positivo que se pode escrever é +9999

2.2.1 - Complemento da base 10

Como o número de digitos total é cinco, o complemento da base ou seja, o complemento de 10 será obtido subtraindo o numero de 10^5

Exemplo: $10^5 - A = 10^5 - 00003 = 99997$

A convenção que se utilizará é a de que o complemento de 10 de um número positivo representa o correspondente número negativo, ou seja: $99997 = -3$

O sistema é consistente uma vez que somando $3+(-3)$ se obtém

$$\begin{array}{r} 00003 \\ 99997 \\ \hline \ldots 1;00000 \end{array}$$

ou seja, um número de cinco algarismos 00000 que corresponde ao zero habitual.

a) Seja agora a operação abaixo indicada, em que A e B são os números referidos no primeiro exemplo:

$A-B = 00003 - 00127$ dado que:

$-00127 \rightarrow \underbrace{99873}_{\text{representação simbólica de } (-00127)}$

temos:

$A-B \rightarrow 00003+99873 = \underbrace{9}_{\text{sinal}}9876$

O resultado obtido é um número negativo; o correspondente número positivo obtém-se subtraindo-o de 10^5

$$10^5 - 99876 = 00124$$

Portanto o resultado da operação é 00124 com o sinal (-)

No entanto como introduzimos na nossa convenção o conceito de numero negativo, podemos perfeitamente manter a representação 99876 desde que nos lembremos do seu significado.

Matemàticamente o que se realizou foi o seguinte:

$$00003 - 00127 + 10^5 = 00003 + 99873 = 99876$$

<u>Resumindo:</u> $S + 10^5 = R$; sendo S o resultado a obter e R a representação desse resultado assumindas as convenções referidas, donde se pretendermos obter o numero positivo com o sinal menos teremos de tirar 10^5 ao resultado, ou seja:

$S + 10^5 = R$

$S = R - 10^5$

$S = -(10^5 - R)$

$$\begin{array}{r} 100000 \\ - \underline{\quad 99876} \\ (-)\ 00124 \end{array}$$

b) Seja a operação $-A-B = -00003 - 00127$

Efectuando a operação em termos de complementos temos:

$$-A-B \longrightarrow 99997 + 99873 = \underline{1}\,99870$$

Do numero $\underline{1}99870$ obtido deste modo abstrairemos o sinal de transporte convertendo-se em 99870 ou seja o equivalente a -130

Matemàticamente a justificação é a seguinte:

$$-A-B \rightarrow -3 + 10^5 - 127 + 10^5 = 9997 + 99873 = 199870$$

Para se obter o resultado em termos de numeros positivo precedidos de sinal menos há que retirar 2×10^5 ao numero anterior

$$-(2 \times 10^5 - 199874) = -00130$$

Para se obter o numero negativo sob a forma de complemento de 10, há que retirar apenas 10^5 obtendo-se 99870. De notar que ao desprezarmos o sinal de transporte estamos exactamente a subtrair 10^5 ou seja, a obter o resultado em complemento de 10

Conclusoes:

— Operam-se os numeros convertendo os negativos em complementos de 10 e utilizando unicamente a operação soma.

— Sempre que houver sinais de transporte ignoram-se

— Obviamente é necessario não exceder, no resultado das operacoes a capacidade de digitos definida inicialmente (no caso dos exemplos 4 digitos). Assim o maior numero positivo será 09999 e o menor numero negativo 90000 (10^5-90000) = -10.000)

Trabalhamos portanto com mais um numero negativo do que positivos.

4.2.2. — Complemento da base menos um (10-1)

De modo semelhante ao referido no complemento de 10 obtem-se o complemento de 9 subtraindo o numero em causa de (10^5-1) ou se preferirmos calcula-se o complemento de 10 e subtrai-se uma unidade.

Sejam:
$$A = 0\underline{0003} = +3$$
$$B = 0\underbrace{0127} = +127$$

A filosofia de numero negativo é semelhante à que se definiu anteriormente.

$$-A = -3 \Rightarrow (10^5 - 1) - 00003 = (10^5 - 00003) - 1$$

como $10^5 - 1 = 9999$

$$\begin{array}{r} 9999 \\ 0003 \\ \hline 9996 \end{array} \Rightarrow -3$$

ou:

$$\begin{array}{r} 10000 \\ 0003 \\ \hline 9997 \\ -1 \\ \hline 9996 \end{array} \Rightarrow -3$$

A utilização de complemento de 9 leva-nos à necessidade de definir um valor zero com duas representações: +0 e -0

$+0 \Rightarrow 00000$ $\rightarrow$ tome-se o seu complemento $\begin{array}{r} 99999 \\ 00000 \\ \hline 99999 \end{array}$

$-0 \Rightarrow 99999$ $\leftarrow$

Interessa agora definir as regras que permitem operar no sistema de complemento a 9

a) $A+B = 00003 + 00127 = 00130 = +130$

b) $B-A = 00127 - 00003$ Transformemos o numero -3 no seu complemento a 9 e tomemo-lo como equivalente ao numero negativo

$$-00003 \Rightarrow \begin{array}{r} 99999 \\ 00003 \\ \hline 99996 \end{array}$$

Como a operação que queremos efectuar é B-A = B+(-A) temos:

$$B+(-A) \rightarrow \begin{array}{r} 00127 \\ 99996 \; (-A) \\ \hline 1{,}00123 \\ 1 \\ \hline 00124 \end{array}$$

Como se vê para obter o resultado correcto, tem que se adicionar o sinal de transporte. Vejamos a justificação matemática:

$$127 - 3 + (10^5-1) \longrightarrow 127 + 99996 = 123$$

Inicialmente somou-se 10^5-1. Para obter o resultado final correcto ter-se-ia que subtraer 10^5-1 ou seja, eliminar o sinal de transporte, equivalente a subtrair 10^5 e somar 1 ao resultado. Como mnemónica pode-se assentar que se soma o sinal de transporte ao resultado.

c) A-B = 00003-00127

do mesmo modo: -00127 → 99872

e transforma-se a diferença numa soma.

$$A-B \longrightarrow \begin{array}{r} 00003 \\ 99872 \\ \hline 99875 \end{array}$$

O resultado reconhece-se como a representação de um número negativo que se pode obter na forma usual (-xxxx) subtraindo-lhe 10^5-1

Do ponto de vista matemático o que se fez foi

$$A-B \rightarrow 3-127+(10^5-1)$$

donde para obter o resultado final seria necessário subtrair (10^5-1). No entanto como o numero é negativo pode-se mantê-lo na forma de complemento de 9 desde que o interpretemos correctamente $99875 \rightarrow -124$

d) $-A-B$

$$-A \rightarrow -00003+(10^5-1)$$

$$-B \rightarrow -00127+(10^5-1)$$

$$-A-B \rightarrow -00003-00127+2\times(10^5-1)$$

Para obter o resultado correcto final haveria que subtrair $2\times10^5-2$; ou seja desprezar dois sinais de transporte e somar 2 ao resultado final. Contudo, como o numero é negativo, para obter o resultado na representação de complemento de 9 só se tem que subtrair (10^5-1) ou seja de modo semelhante ao indicado em b), despreza-se o transporte e soma-se o seu valor (1) ao resultado

$$-00003+(10^5-1)=99996$$

$$-00127+(10^5-1)=99872$$

$$\begin{array}{r} 99996 \\ 99872 \\ \hline 1\ 99868 \\ \hookrightarrow 1 \\ \hline 99869 \end{array}$$

Conclusão:

— Operam-se os numeros convertendo os negativos no seu complemento de nove e utilizando a soma como unica operação.

— Sempre que houver sinais de transporte somam-se ao resultado, ignorando-os no local onde apareçam

— Não se pode exceder no resultado da operação a capacidade maxima quer dos numeros positivos, quer negativos.

Maior numero positivo $09999 = 10^4 - 1$
Menor numero negativo $90000 = 10^4 - 1$

Portanto, e conforme vimos anteriormente, quando trabalhamos em complemento de 10, temos um unico zero ($\underline{0}0000$), $(10^{n-1} - 1)$ numeros positivos e (10^{n-1}) numeros negativos, sendo $\underline{n}$ o numero de algarismos ou simbolos utilizados incluindo o representativo do sinal. Trabalhando em complemento de 9 o numero zero tem duas representações (+ e −0), e podemos representar $(10^{n-1} - 1)$ numeros positivos e igual quantidade de numeros negativos

2.2.3 - Código binário ou base binária.

Como habitualmente os computadores trabalham em linguagem binaria (base 2) o que anteriormente se desenvolveu em complementos de 10 e 9 deverá neste caso ser tratado em complemento de 2 e 1

· De notar que achar o complemento de 1 em base binaria corresponde a complementar os diferentes bits do numero em questão.

Exemplo: $100 \rightarrow 011$,

Do mesmo modo o complemento de 2 pode ser conseguido achando o complemento de 1, e somando uma unidade ou então, subtraindo o numero directamente de 2^n

Exemplo $1000 - 100 = 100 \Longleftrightarrow 011 + 1 = 100$

2.2.4 - Considere-se o complemento de 2 dos seguintes numeros:

$A = 00011 \quad (+3)_{10}$

$B = 01000 \quad (+8)_{10}$

$A - B = (3-8)_{10} = (-5)_{10}$

a) $A - B \rightarrow 00011 + (\underbrace{2^5 - 01000})$

complemento de 2

$$\begin{array}{r} 100000 \\ -\ 01000 \\ \hline 11000 \end{array}$$

ou

$$\begin{array}{r} 10111 \\ 1 \\ \hline 11000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 00011 \\ 11000 \\ \hline 11011 \end{array}$$

Como o resultado é negativo aparece, de acordo com a convenção de complemento de 2, com um "um" à esquerda na 5ª casa.

b) $-A-B = 2^5 - 00011 + 2^5 - 01000 = -A-B+2\times 2^5$

Não considerar o sinal de transporte equivale a subtrair 2^5

Por outro lado, $-A-B+2^5$ equivale à apresentar o resultado em complemento de 2.

Portanto:

$2^5 - 00011 = 11101$ ou $11100+1$

$2^5 - 01000 = 11000$ ou $10111+1$

$-A-B = (-3-8)_{10} = (-11)_{10}$

$$-A-B \longrightarrow \begin{array}{r} 11101 \\ 11000 \\ \hline 110101 \end{array} \rightarrow (-11)_{10}$$

Sinal de transporte: retirá-lo equivale a subtrair 2^5

<u>Resumindo:</u>

— Operam-se os números convertendo os negativos em complemento de 1 e utilizando apenas a operação soma.

— Ignoram-se eventuais sinais de transporte

— Não se pode exceder no resultado da operação a capacidade máxima positiva ou negativa dada pelo nº de símbolos utilizados (n) que é de 2^{n-1} para os positivos e de 2^{n-1} para os negativos

2.2.5 - Complemento de 1

Para o complemento de 1 tem-se:

$A = 00011 = (3)_{10}$

$B = 01000 = (8)_{10}$

a) $A - B = (3)_{10} - (8)_{10} = (5)_{10}$

$A - B \Rightarrow A + \underbrace{(2^5 - 1) - B}_{\text{complemento de } 1}$

$-B \Rightarrow 11111 - 01000 = 10111$

O resultado aparecerá negativo em linguagem convencional de complemento de 1

$$\begin{array}{r} 00011 \\ 10111 \\ \hline 1\,11010 \end{array}$$

Resumindo:

— Operam-se os numeros convertendo os negativos em complemento de 1 e utilizando apenas a operação soma.

— Sempre que houver sinais de transporte somam-se ao resultado, ignorando-os no local onde aparecem

— Não se pode exceder no resultado da operação a capacidade maxima positiva ou negativa dada pelo numero de simbolos utilizados (n) que é $(2^{n-1} - 1)$

3. ALGEBRA DE BOOLE

3.1. CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Uma álgebra de Boole a dois valores é formada por um conjunto de dois elementos, "0" e "1", em que se define as seguintes operações:

1- União, que satisfaz às seguintes relações:

$$0 + 0 = 0$$
$$0 + 1 = 1$$
$$1 + 0 = 1$$
$$1 + 1 = 1$$

A esta operação também se chama "Função Ou"

2- Intersecção, que satisfaz as seguintes relações:

$$0 . 0 = 0$$
$$0 . 1 = 0$$
$$1 . 0 = 0$$
$$1 . 1 = 1$$

Também se chama "Função E"

3- Complementação:

$$\overline{0} = 1 \quad e \quad \overline{1} = 0$$

Também é chamada "Inversão"

É possível demonstrar as seguintes propriedades, sendo a e b variáveis que podem tomar quer o valor "0" quer o valor "1"

$a + a = a$	$a . a = a$
$a + b = b + a$	$a . b = b . a$
$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a . b) . c = a . (b . c)$

$a+(b.c)=(a+b).(a+c)$ $\quad$ $a.(b+c)=(a.b)+(a.c)$

$1+a=1$ elem. absorvente $\quad$ $1.a=a$

$0+a=a$ elem. neutro $\quad$ $0.a=0$

$a+\bar{a}=1$ $\quad$ $a.\bar{a}=0$

$$\bar{\bar{a}}=a$$

A apresentação deste conjunto de propriedades permite a verificação do princípio da dualidade:

- Substituindo + por •, 1 por 0 e 0 por 1 é possível passar de um dos grupos de relações para o outro.

Ex.º $\quad a+a=a \longrightarrow a.a=a$

$\quad\quad 1+a=1 \longrightarrow 0.a=0$

Poder-se-iam ainda demonstrar outras relações, das quais realçaremos as conhecidas por leis de Morgan.

1 - $\overline{a.b}=\bar{a}+\bar{b}$ $\quad$ 1.ª lei de Morgan

2 - $\overline{a+b}=\bar{a}.\bar{b}$ $\quad$ 2.ª lei de Morgan

Algumas relações têm um interesse particular

$a.(a+b)=a \rightarrow$ $\quad a.\underbrace{(a+b)}_{1}=a$ $\quad =1 \leftarrow$ se $a=1$

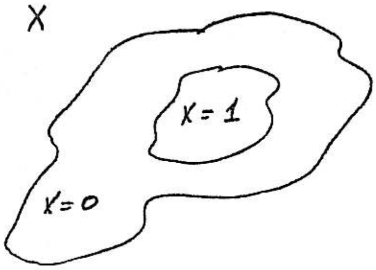
$a(1+b)=a.1=a \Leftarrow$ $a+a.b=a$ $\quad \underbrace{\ }_{\emptyset}$ $\quad =\emptyset \leftarrow$ se $a=\emptyset$

$\cancel{a+b.c}=(a+b).(a+c)$

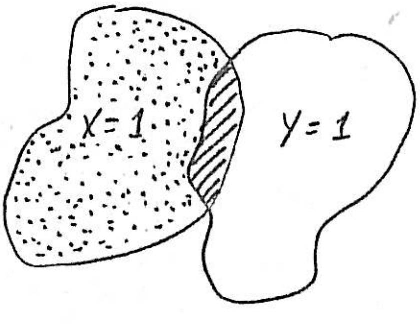
A verificação de relações Booleanas pode ser conseguida a partir dos diagramas de Venn

3.2. DIAGRAMAS DE VENN

Considere-se uma variável Booleana representada no domínio do plano. Assume-se a existência de uma zona desse plano na qual a variável toma o valor 1 e a correspondente zona complementar na qual toma o valor 0.



Utilizando outras zonas do plano (desde que complementares) nas quais se definem os domínios em que outras variáveis tomam os valores 0 e 1, é possível visualizar teoremas e axiomas e relações da álgebra de Boole a dois valores.

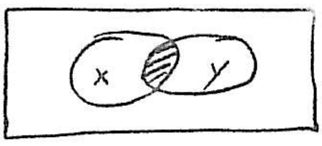


$\overline{X}\,\overline{Y}$

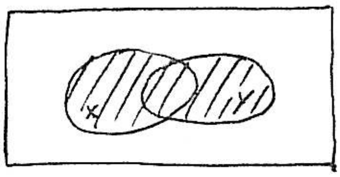
A zona a tracejado corresponde a X.Y, ou seja, a zona onde Y e X tomam o valor 1. A zona a ponteado poderá ser representada por $X.\overline{Y}$, e a zona a branco por $\overline{X}.Y$. O exterior a estas três zonas será obviamente $\overline{X}.\overline{Y}$

Representem-se algumas relações

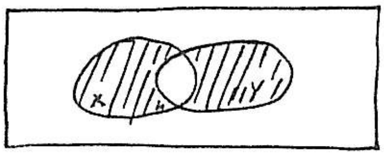
1- X.Y



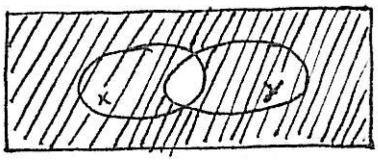
2- $X+Y$



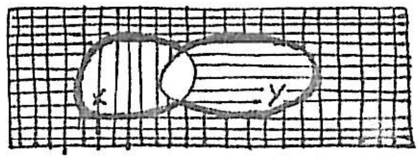
3- $X \oplus Y \equiv X\overline{Y} + \overline{X}Y$ ("Ou" exclusivo)



4- $\overline{X.Y} = \overline{X} + \overline{Y}$ 1.ª lei de Morgan



$\overline{X.Y}$



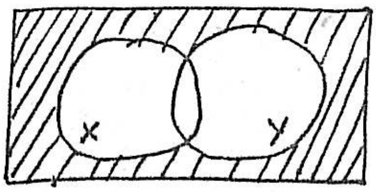
$\overline{X}.\overline{Y} \rightarrow$ #

$\overline{X} \rightarrow \equiv$

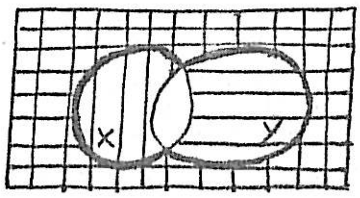
$\overline{Y} \rightarrow |||$

$\overline{X}+\overline{Y}$ - o ≡ ou ||| ou 田

5- $\overline{X+Y} = \overline{X}.\overline{Y}$ 2.ª lei de Morgan



$\overline{X+Y}$

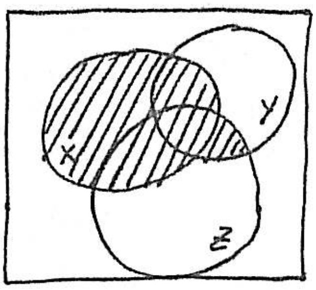


$\overline{X}.\overline{Y} \rightarrow$ #

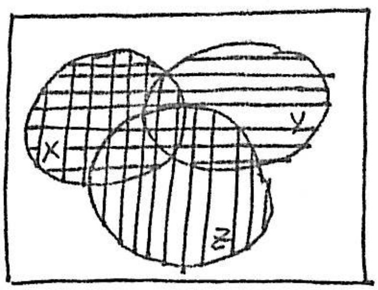
$\overline{X} \rightarrow \equiv$

$\overline{Y} \rightarrow |||$

6- $X + Y.Z = (X+Y).(X+Z)$



$X + Y.Z$

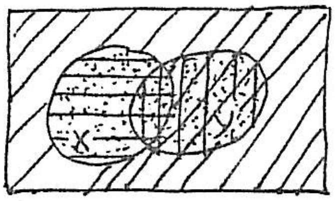


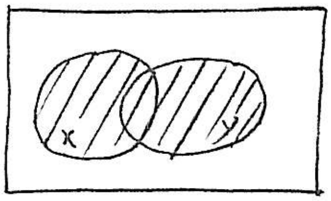
$(X+Y).(X+Z) \rightarrow$ #

$X+Y \rightarrow \equiv$

$X+Z \rightarrow |||$

7- $X + \bar{X}.Y = (X+\bar{X}).(X+Y) = 1.(X+Y) = X+Y$



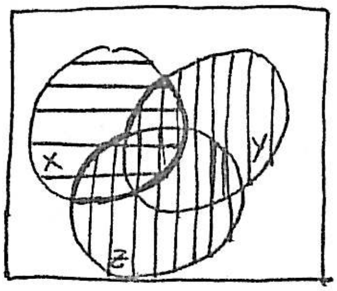


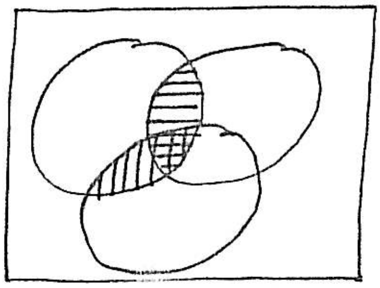
$X + Y$

$X \to \equiv$
$\bar{X} \to ///$
$y \to |||$
$\Rightarrow \bar{X}.y \to \#$

$x + \bar{x}.y \to \equiv /// \cup \equiv$

8- $X.(y+z) = (X.y)+(X.z)$





$X.(y+z)$

$X \to \equiv$

$y+z \to |||$

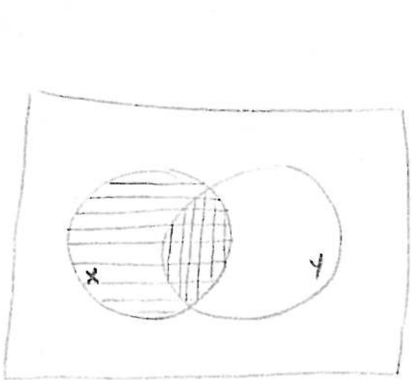
$X.(y+z) \to \#$

$(X.y)+(X.z)$ → toda a zona tracejada.

$X.y \to \equiv$

$X.z \to |||$

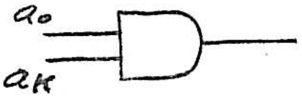
9- $X + X.Y = X$



$X \equiv$
$X.Y\ |||$
$\to X + XY = \equiv \cup \# = X$

3.3. Função E, OU, NÃO

a- Represente-se uma função "E" obtida a partir de n variáveis binárias a_n.



$E = f(a_0, a_1, \ldots, a_K) = a_0 \circ a_1 \circ \ldots \circ a_K$

Da definição já estudada desta função infere-se que f apresentará o valor $\underline{0}$, sempre que pelo menos uma das variáveis de entrada a_n, o apresentar; apresentará o valor $\underline{1}$ sempre que todas as variáveis a_n tenham esse estado.

Estabelecendo um quadro em que se tome um numero limitado de variáveis a_n (2 por exemplo) demonstra-se fácilmente o afirmado.

a_0	a_1	f
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Propriedades da funcão E:

Dada a variável A, as seguintes relações são válidas:

$A . 0 = 0$

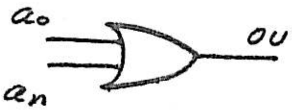
$A . 1 = A$

$A . A = A$

$A . \bar{A} = 0$

Estas relações podem ser verificadas pela tabela de verdade acima.

b- De modo identico se definirá a função "OU"



$= g(a_0, a_1, \ldots, a_K) = a_0 + a_1 + \ldots + a_K$

função esta que apresentará o valor $g = 0$ desde que todos os a_n o apresentem, e $g = 1$ sempre que, pelo menos algum dos a_n, seja igual a 1.

Identicamente:

a_0	a_1	g
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

· Propriedades da função "OU"

Dada a variavel A, as seguintes relações são válidas:

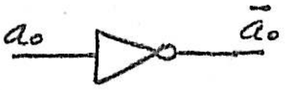
$$A + 0 = A$$

$$A + 1 = 1$$

$$A + A = A$$

$$A + \bar{A} = 1$$

c- A função "NÃO" representará o complemento da variavel de entrada.



$$f \equiv \text{NÃO} = \overline{a_0}$$

3.3.1. Implementação. Lógica positiva e negativa

As funções lógicas acima definidas podem ser implementadas electrónicamente.

Identificam-se os estados 1 e 0 com níveis de tensão (ou correntes).

— LOGICA POSITIVA: Estar-se-á perante uma lógica positiva desde o momento em que ao valor mais positivo da tensão corresponda o estado lógico "1" e ao menos positivo o "0".

Exemplo: +5 V → "1" lógico

+3 V → "0" lógico

ou então no caso de tensões negativas:

−10 V → "1" lógico

−15 V → "0" lógico

- LÓGICA NEGATIVA : Inversamente se ao estado mais positivo corresponder o "0" lógico e ao menos positivo "1" lógico.

Exemplo: +5 V → "0" lógico

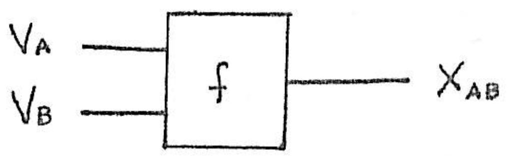
+3 V → "1" lógico

−10 V → "0" lógico

−15 V → "1" lógico

Como aplicação considere-se um dispositivo determinado pelas seguintes condições:

V_A	V_B	X_{AB}
+5	+5	+5
+5	0	0
0	+5	0
0	0	0



Encaremos este dispositivo atribuindo um significado lógico às tensões obtidas:

1 - LÓGICA POSITIVA : +5 V → "1" lógico

0 V → "0" lógico

A	B	X
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Estamos perante uma função "E" ou seja: $X = A . B$

– LÓGICA NEGATIVA: $+5V \longrightarrow$ "0" lógico
$0V \longrightarrow$ "1" lógico

donde vem a tábua de verdade:

A	B	X
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Estamos perante uma função "OU"
ou seja $X = A + B$

CONCLUSÃO:

Passando de uma lógica positiva para uma lógica negativa, passa-se da função "E" para a função "OU".

Do mesmo modo, se tivessemos partido de um dispositivo que realizasse esta outra função:

V_A	V_B	X_{AB}
+5	+5	+5
+5	0	+5
0	+5	+5
0	0	0

Consoante interpretarmos esta, segundo um conceito de lógica positiva ou negativa, obteríamos as seguintes funções:

LÓGICA POSITIVA:

A	B	X_1
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$X_1 = A + B$

LÓGICA NEGATIVA:

A	B	X_2
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$X_2 = A \cdot B$

Estes resultados documentam o princípio da dualidade já enunciado.

3.3.2 Demonstração de relações lógicas utilizando "mapas de verdade"

Considere-se uma relação lógica, por exemplo $\overline{A.B} = \bar{A} + \bar{B}$ que se pretende demonstrar. Dois caminhos se abrem:

a) Demonstrá-la a partir dos axiomas da Algebra de Boole.

b) Demonstrar que para todos os casos possiveis de valores que A e B possam tomar, a relação é válida.

Exemplifiquemos a alinea b)

A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{A}+\bar{B}$	$A.B$	$\overline{A.B}$
0	0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0

$\underbrace{A \quad B}_{\text{Casos possiveis}}$ $\qquad$ $\bar{A}+\bar{B} = \overline{A.B}$

Este método, embora moroso, é perfeitamente válido uma vez que esgota todas as situações possiveis.