TÉCNICO LISBOA

SISTEMAS DIGITAIS (SD)

MEEC

Acetatos das Aulas Teóricas

Versão 4.0 - Português

Aula Nº 02:

Título: Sistemas de Numeração e Códigos

Sumário: Sistemas de numeração (base 10, base 2, base 8 e 16). Operações aritméticas básicas. Mudança de sistema de numeração. Códigos.

2015/2016

Nuno.Roma@tecnico.ulisboa.pt

TÉCNICO LISBOA

Sistemas Digitais (SD)

Sistemas de Numeração e Códigos

TÉCNICO LISBOA

Aula Anterior

- **Na aula anterior:**
  - Motivação:
    - O que é um Sistema Digital?
    - Onde estão os Circuitos Digitais?
    - Perspectiva histórica:
      - Dos primórdios da história até aos computadores de hoje
    - De que é feito um computador?
  - Sistemas Digitais:
    - Programa da cadeira
    - Organização
    - Corpo docente
    - Planeamento
    - Método de Avaliação
    - Aulas Teóricas, Problemas e de Laboratório
    - Bibliografia

TÉCNICO LISBOA

Planeamento

SEMANA	TEÓRICA 1	TEÓRICA 2	PROBLEMAS/LABORATÓRIO
14/Set a 19/Set	Introdução	Sistemas de Numeração e Códigos	
21/Set a 26/Set	Álgebra de Boole	Elementos de Tecnologia	P0
28/Set a 3/Out	Funções Lógicas	Minimização de Funções Booleanas (I)	L0
5/Out a 10/Out	Minimização de Funções Booleanas (II)	Def. Circuito Combinatório; Análise Temporal	P1
12/Out a 17/Out	Circuitos Combinatórios (I) – Codif., MUXs, etc.	Circuitos Combinatórios (II) – Som., Comp., etc.	L1
19/Out a 24/Out	Circuitos Combinatórios (III) - ALUs	Circuitos Sequenciais: Latches	P2
26/Out a 31/Out	Circuitos Sequenciais: Flip-Flops	Ling. de Descrição e Simulação de HW (ferramentas disponíveis no laboratório)	L2
2/Nov a 7/Nov	Caracterização Temporal	Registos	P3
9/Nov a 14/Nov	Revisões **Teste 1**	Contadores	L3
16/Nov a 21/Nov	Síntese de Circuitos Sequenciais: Definições	Síntese de Circuitos Sequenciais: Minimização do número de estados	P4
23/Nov a 28/Nov	Síntese de Circuitos Sequenciais: Síntese com Contadores	Memórias	L4
30/Nov a 5/Dez	Máq. Estado Microprogramadas: Circuito de Dados e Circuito de Controlo	Máq. Estado Microprogramadas: Endereçamento Explícito/Implícito	P5
7/Dez a 12/Dez	Circuitos de Controlo, Transferência e Processamento de Dados de um Processador	Lógica Programável	L5
14/Dez a 18/Dez	P6	P6	L6

TÉCNICO LISBOA

Sumário

- **Tema da aula de hoje:**
  - Sistemas de numeração:
    - Base 10
    - Base 2
    - Base 8 e 16
  - Operações aritméticas básicas
  - Mudança de sistema de numeração
  - Códigos

- **Bibliografia:**
  - **M. Mano, C. Kime**: Capítulo 1
  - **G. Arroz, J. Monteiro, A. Oliveira**: Capítulo 1

TÉCNICO LISBOA

Definição de um Sistema de Numeração Posicional

- **Um sistema de numeração é composto por:**
  - **Base** - *b*
    e.g. Base = 16
  - **Alfabeto Ordenado** - conjunto de *b* símbolos distintos (dígitos)
    e.g. [0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F]
  - **Número** - corresponde a uma sequência de dígitos
    e.g. N(b) <> … $d_2\ d_1\ d_0,\ d_{-1}\ d_{-2}$ …
  - **Valor do Dígito (peso)** - função do símbolo e da posição na sequência.
    e.g. $p_2 = d_2\ b_2$

Exemplos:

S.N. :	Decimal	Binário	Octal	Hexadecimal
	28886_{10}	10101110_2	5270_8	$A32C_{16}$ = A32Ch = 0xA32C

TÉCNICO LISBOA

Sistemas de numeração

- **Exemplos com várias bases**

Base 10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Base 4	0	1	2	3	10	11	12	13	20	21
	22	23	30	31	32	33	100	101	102	103
Base 3	0	1	2	10	11	12	20	21	22	100
	101	102	110	111	112	120	121	122	200	201
Base 2	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001
	1010	1011	1100	1101	1110	1111	10000	10001	10010	10011
Base 16	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13

Determinação do Equivalente Decimal

- **Equivalente Decimal** - Representação no sistema decimal de um número na base b.

$$N_{(10)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} d_i b^i = \ldots + d_2 b^2 + d_1 b^1 + d_0 b^0 + d_{-1} b^{-1} + \ldots$$

Exemplos:

- **S.N.: Binário** **Decimal**

  $10101110_2 \longrightarrow (2^7 + 0 + 2^5 + 0 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 0)_{10} \longrightarrow 174_{10}$

- **S.N.: Hexadecimal** **Decimal**

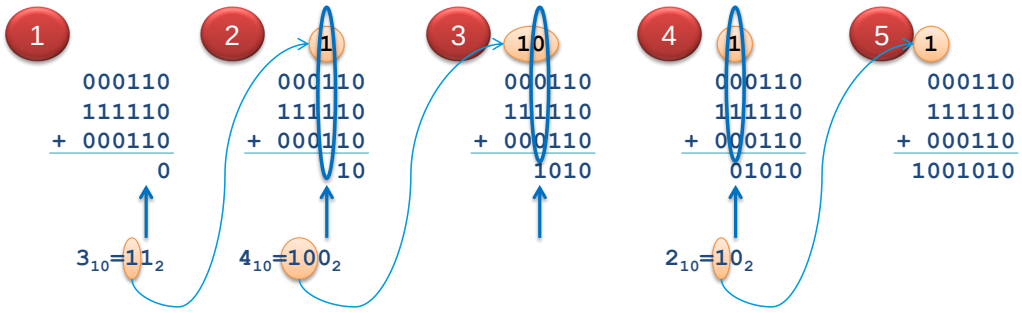
  $A32C_{16} \longrightarrow (10x16^3 + 3x16^2 + 2x16^1 + 12x16^0)_{10} \longrightarrow 41772_{10}$

Operações Aritméticas Básicas

- Algoritmos em tudo semelhantes aos do sistema decimal, exceto na base utilizada.

Exemplo:

$110_2 + 111110_2 + 110_2$



Operações Aritméticas Básicas

- Algoritmos em tudo semelhantes aos do sistema decimal, exceto na base utilizada.

Exemplos:

S.N. : Binário

```
  0110        10110
+ 1101      x  1101
 10011        10110
             00000_
            10110__
          + 10110___
            100011110
```

S.N. : Hexadecimal

```
  5AF1h       A24h
+ B32Dh     x  13h
 10E1Eh       1E6Ch
            + A24-h
              C0ACh
```


Mudança de Sistema de Numeração

CONVERSÃO DE BASES ($b_x \neq 10$ para $b_y = 10$)

- A conversão de um número numa base diferente de 10 para a base decimal reduz-se a representar esse número como um polinómio e de seguida determinar o equivalente decimal:

$$N_{(10)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} d_i b^i = \ldots + d_2 b^2 + d_1 b^1 + d_0 b^0 + d_{-1} b^{-1} + \ldots$$

Exemplos:

$10101110_2 \longrightarrow (2^7 + 0 + 2^5 + 0 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 0)_{10} \longrightarrow 174_{10}$

$A32Ch \longrightarrow (10 \times 16^3 + 3 \times 16^2 + 2 \times 16^1 + 12 \times 16^0)_{10} \longrightarrow 41772_{10}$

Mudança de Sistema de Numeração

- **CONVERSÃO DE BASES (b_x=10 para $b_y \neq 10$)**
  - A conversão de um número na base 10 para uma base diferente realiza-se em duas fases:
    1. A parte inteira é convertida segundo o método das divisões sucessivas.
    2. A parte fraccionária é convertida segundo o método das multiplicações sucessivas.

Mudança de Sistema de Numeração

- **CONVERSÃO DE BASES (b_x=10 para $b_y \neq 10$)**

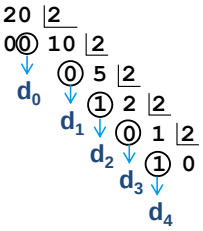
Exemplo (parte inteira):

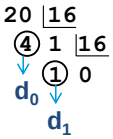
S.N. :	Decimal		Binário		Hexadecimal
	$20{,}35_{(10)}$	→	$10100{,}\ldots_{(2)}$	→	$14{,}\ldots_{(16)}$

O número a converter e os quocientes sucessivos são divididos pela base.

A sequência de restos constitui o resultado da conversão.

1º resto = dígito menos significativo





Mudança de Sistema de Numeração

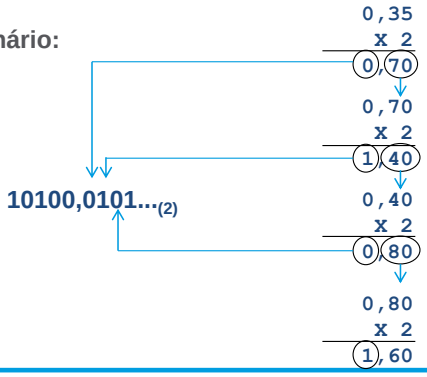
- **CONVERSÃO DE BASES (b_x=10 para $b_y \neq 10$)**

Exemplo (parte fraccionária):

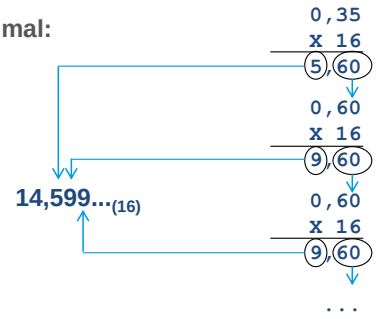
S.N. : **Decimal** → **Binário** → **Hexadecimal**

$20,35_{(10)}$ → **$10100,\ldots_{(2)}$** → **$14,\ldots_{(16)}$**

Binário:



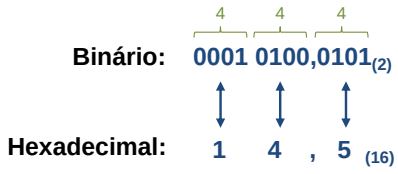
Hexadecimal:

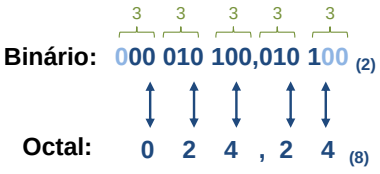


Mudança de Sistema de Numeração

- **CONVERSÃO DE BASES ($b_t = 2^t$ para b = 2)**
  - Atendendo às propriedades das potências, facilmente se infere que:
    1. Na conversão da base 2^t para a base 2, transforma-se cada dígito da base 2^t em t bits da base 2.
    2. Na conversão da base 2 para a base 2^t, transforma-se cada t bits da base 2 num dígito da base 2^t.

Exemplos:





Códigos Binários

Entende-se por **código binário** uma correspondência entre palavras escritas num qualquer sistema de numeração e palavras constituídas por caracteres binários.

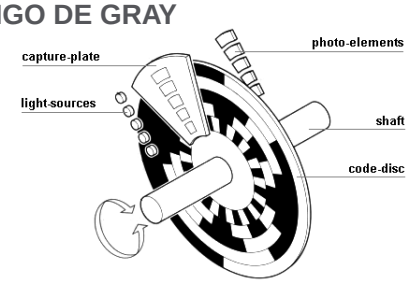
Exemplo: $12_{(10)}$ <> $1100_{(2)}$

- **CÓDIGO BINÁRIO NATURAL (CBN)**
  - Código ponderado, gerado pelo sistema de numeração de base 2, em que os pesos das colunas são sucessivamente 2^{n-1}, 2^{n-2}, …, 2^1, 2^0.
- **CÓDIGO BINÁRIO REFLECTIDO (CBR) ou CÓDIGO DE GRAY**
  - Código não ponderado, obtido do CBN por troca de símbolos do alfabeto binário;
  - Apresenta como característica fundamental o facto de dois símbolos que representam números consecutivos terem apenas um bit diferente.

	CBN	CBR
0	000	000
1	001	001
2	010	011
3	011	010
4	100	110
5	101	111
6	110	101
7	111	100

Códigos Binários

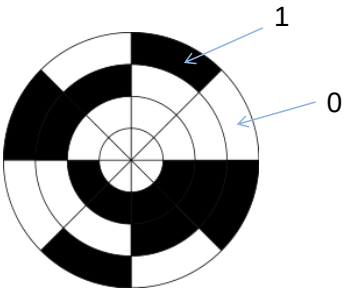
- **CÓDIGO BINÁRIO REFLECTIDO (CBR) ou CÓDIGO DE GRAY**
  - Motivação:
    - Muitos dispositivos indicam a sua posição através da abertura e fecho de interruptores.
    - Se a posição desses interruptores for codificada em código binário natural, as seguintes duas posições serão adjacentes: 011 → 100
    - Na prática, é muito difícil garantir que os interruptores comutem exatamente ao mesmo tempo. Neste exemplo, em particular, os 3 interruptores trocam de estado. Como consequência, durante o intervalo de tempo em que eles estão a trocar de estado poderão surgir estados transitórios. Exemplo:
      011 — 001 — 101 — 100.
    - Quando os interruptores aparentam estar na posição 001, o observador não sabe se este é o estado definitivo (001) ou apenas uma transição entre outros dois estados, dando assim origem a leituras incorretas.
  - Solução:
    - **Código de Gray**: 2 símbolos que representam números consecutivos diferem apenas 1 bit.

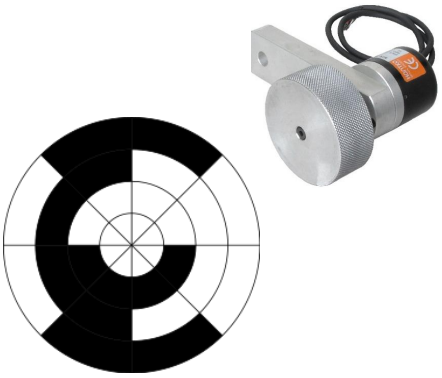


Códigos Binários

- **CÓDIGO BINÁRIO REFLECTIDO (CBR) ou CÓDIGO DE GRAY**

  Aplicação: encoder de posição





Código Binário Natural (CBN)

Código Binário Reflectido (CBR)
Os códigos de duas posições adjacentes diferem apenas num bit

Códigos Binários

- **CÓDIGO BINÁRIO REFLECTIDO (CBR) ou CÓDIGO DE GRAY**

  Construção:

Código de Gray

a	b	c	d	e	decimal
0	0	00	00	000	0
1	1	01	01	001	1
	1	11	11	011	2
	0	10	10	010	3
			10	110	4
			11	111	5
			01	101	6
			00	100	7

a- Código gray 1 bit
b- Reflexão do código
c- Adicionar 0's e 1's = código gray 2 bits
d- Reflexão do código anterior
e- Adicionar os 0's e 1's = código gray 3 bits

Nota: as colunas b e d não fazem parte do código de gray

Códigos Decimais-Binários

Entende-se por **código decimal-binário** um código que estabelece a correspondência directa entre caracteres da palavra constituída por símbolos da base 10 e a sua codificação binária.

- **CÓDIGO BCD ("Binary-Coded Decimal")**
  - O código BCD corresponde ao CBN com N=4.

    Exemplo: $12_{(10)}$ <> 0001 0010 $_{(BCD)}$

Nota: Nas operações aritméticas deve ser introduzido um factor de correcção, $\mathbf{6_{(10)} <> 0110_{(BCD)}}$, sempre que o resultado seja superior ou igual a 10.

BCD

0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001

Códigos Decimais-Binários

- **Exemplo: operação de soma**

599_{10}
$+984_{10}$

BCD

	0101	1001	1001
+	1001	1000	0100
	1110	10001	1101
	(14_{10})	(17_{10})	(13_{10})
	1110	10001	1101
			+0110
	1110	10010	0011
	(14_{10})	(18_{10})	(3_{10})
	1110	0010	1101
	+1	0110	
	1111	1000	0011
	(15_{10})	(8_{10})	(3_{10})
	1111	0010	1101
	+0110		
0001	0101	1000	0011
(1_{10})	(5_{10})	(8_{10})	(3_{10})

A **operação de soma** em BCD é semelhante à soma em binário. A diferença consiste no seguinte:

- Sempre que o resultado da soma originar um dígito não válido em decimal (valor >9), deve-se somar 6 ao resultado.

Dígitos d_0,d_1,d_2 inválidos
Correção ao dígito d_0

Dígitos d_1,d_2 inválidos
Correção ao dígito d_1

Dígito d_2 inválido
Correção ao dígito d_1

Todos os dígitos válidos

Códigos Alfanuméricos

- **CÓDIGO ASCII (American Standard Code for Information InterChange):**
  - Exemplo de código alfanumérico que permite codificar informação numérica, alfabética e também caracteres de controlo.

Código ASCII (7-bits):

$B_6 B_5 B_4$ \ $B_3 B_2 B_1 B_0$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	NUL	SOH	STX	ETX	EOT	ENQ	ACK	BEL	BS	HT	LF	VT	FF	CR	SO	SI
1	DLE	DC1	DC2	DC3	DC4	NAK	SYN	ETB	CAN	EM	SUB	ESC	FS	GS	RS	US
2	SP	!	"	#	$	%	&	'	(	)	*	+	,	-	.	/
3	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	:	;	<	=	>	?
4	@	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
5	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	[	\	]	^	_
6	`	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o
7	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	{	|	}	~	DEL

Representação numérica: 46_{16}

Exemplo: "Margarida" equivale à sequência de números

$4D_{16}$, 61_{16} , 72_{16} , 67_{16} , 61_{16} , 72_{16} , 69_{16} , 64_{16} , 61_{16}

Representação Digital da Informação

- **Representação Digital da Informação**
  - É habitual organizar os bits em unidades de maior capacidade
    - Exemplos:
      - Tabela de caracteres ASCII com 127 símbolos → 7 bits
      - Tabela de caracteres ISO-8859-1 com 256 símbolos (inclui acentos) → 8 bits
      - Representação RGB da cor de um pixel → 24 bits
  - Em geral, a informação é processada, transferida e armazenada em unidades de 8-bits: ***byte*** (ou octeto)
  - Em algumas aplicações (ex: codificação BCD), é usual utilizar unidades de 4-bits: ***nibble***

Como é natural, ***2 nibbles = 1 byte***

Representação Digital da Informação

Representação Digital da Informação

- Quando se consideram grandes quantidades de informação, é usual utilizar múltiplos da unidade:

Múltiplo	Potência	Relação com o múltiplo inferior	Representação na base 10	Denominação
1	2^0		1	
1k	2^{10}	= 2^{10}	1024	Quilo
1M	2^{20}	= 2^{10} k	1 048 576	Mega
1G	2^{30}	= 2^{10} M	1 073 741 824	Giga
1T	2^{40}	= 2^{10} G	1 099 511 627 776	Tera

Exemplo: um ficheiro ocupa 2,37MB

2,37MBytes = 2,37 x 2^{20} = 2,37 x 1024 x 1024 = **2 485 125 bytes**

Representação Digital da Informação

Conceito de palavra (*word*)

- Unidade mínima processada ou armazenada num dado sistema.
  - Exemplos:

Intel 4004	4 bits	Intel 486	32 bits
Intel 8080	8 bits	Intel Pentium	32 bits
Motorola 6800	8 bits	ARM Cortex A-9	32 bits
Intel 8086	16 bits	Intel Core 2 i7	64 bits
Motorola 68000	16 bits	Cell (STI)	128 bits

- Ao contrário do conceito de ***byte*** e ***nibble***, o conceito de **palavra** não está ligado a uma dimensão fixa. O número de bits de uma palavra depende do contexto (arquitectura) que se está a considerar.

TÉCNICO LISBOA

PRÓXIMA AULA

TÉCNICO LISBOA

Próxima Aula

- **Tema da Próxima Aula:**
  - Álgebra de Boole:
    - Operações básicas
    - Propriedades
    - Portas lógicas
  - Leis de Morgan:
    - Simplificação algébrica

TÉCNICO LISBOA

Agradecimentos

Algumas páginas desta apresentação resultam da compilação de várias contribuições produzidas por:

- Guilherme Arroz
- Horácio Neto
- Nuno Horta
- Pedro Tomás