



TÉCNICO LISBOA

SISTEMAS DIGITAIS (SD)

MEEC

Acetatos das Aulas Teóricas

Versão 4.0 - Português

Aula N° 03:

Título: Álgebra de Boole

Sumário: Álgebra de Boole (operações básicas, propriedades, portas lógicas); Leis de DeMorgan (simplificação algébrica).

2015/2016

Nuno.Roma@tecnico.ulisboa.pt

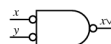
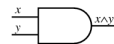
Sistemas Digitais (SD)

Álgebra de Boole



	y
x	
0	0
0	1
1	0
1	1

	y
x	
0	0
0	1
1	0
1	1



Aula Anterior

■ Na aula anterior:

- ▶ Sistemas de numeração
 - Base 10
 - Base 2
 - Base 8 e 16
- ▶ Operações aritméticas básicas
- ▶ Mudança de sistema de numeração
- ▶ Códigos



SEMANA	TEÓRICA 1	TEÓRICA 2	PROBLEMAS/LABORATÓRIO
14/Set a 19/Set	Introdução	Sistemas de Numeração e Códigos	
21/Set a 26/Set	Álgebra de Boole	Elementos de Tecnologia	P0
28/Set a 3/Out	Funções Lógicas	Minimização de Funções Booleanas (I)	L0
5/Out a 10/Out	Minimização de Funções Booleanas (II)	Def. Circuito Combinatório; Análise Temporal	P1
12/Out a 17/Out	Circuitos Combinatórios (I) – Codif., MUXs, etc.	Circuitos Combinatórios (II) – Som., Comp., etc.	L1
19/Out a 24/Out	Circuitos Combinatórios (III) - ALUs	Circuitos Sequenciais: Latches	P2
26/Out a 31/Out	Circuitos Sequenciais: Flip-Flops	Ling. de Descrição e Simulação de HW (ferramentas disponíveis no laboratório)	L2
2/Nov a 7/Nov	Caracterização Temporal	Registos	P3
9/Nov a 14/Nov	Revisões Teste 1	Contadores	L3
16/Nov a 21/Nov	Síntese de Circuitos Sequenciais: Definições	Síntese de Circuitos Sequenciais: Minimização do número de estados	P4
23/Nov a 28/Nov	Síntese de Circuitos Sequenciais: Síntese com Contadores	Memórias	L4
30/Nov a 5/Dez	Máq. Estado Microprogramadas: Circuito de Dados e Circuito de Controlo	Máq. Estado Microprogramadas: Endereçamento Explícito/Implícito	P5
7/Dez a 12/Dez	Circuitos de Controlo, Transferência e Processamento de Dados de um Processador	Lógica Programável	L5
14/Dez a 18/Dez	P6	P6	L6



■ Tema da aula de hoje:

- ▶ Álgebra de Boole:
 - Operações básicas
 - Propriedades
 - Portas lógicas
- ▶ Leis de DeMorgan:
 - Simplificação algébrica

□ Bibliografia:

- M. Mano, C. Kime: Secções 2.1 a 2.2
- G. Arroz, J. Monteiro, A. Oliveira: Secção 2.1

■ A lógica como um sistema binário:

- ▶ Em 1854, George Boole, Professor de Matemática da Universidade de Cork (Irlanda), publicou o livro:

“An Investigation on The Laws of Thought, on which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities”.

- ▶ Este trabalho, mais tarde refinado por Jevons (1869, 1890), Peirce (1880), Schröder (1890) e Huntingdon (1904), considera um sistema lógico binário, i.e., com dois objectos que se podem designar por:

sim-não, verdadeiro-falso, ou ainda 1-0

■ Operações Básicas:

- ▶ Boole define ainda três operações básicas: AND, OR, NOT.
- ▶ Considere-se duas variáveis booleanas: $x, y \in \{0,1\}$,
i.e., $x, y \in \{\text{falso}, \text{verdadeiro}\}$

AND (Produto lógico)		
X	Y	$X \cdot Y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

O resultado é verdadeiro se X for verdadeiro **E** (AND) Y for verdadeiro

OR (Soma lógica)		
X	Y	$X + Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

O resultado é verdadeiro se X for verdadeiro **OU** (OR) Y for verdadeiro

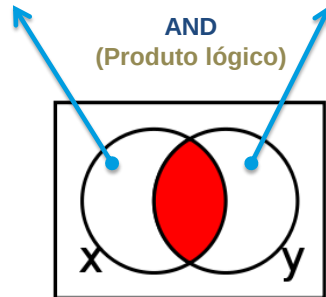
NOT (Complemento)	
X	$\overline{X}$
0	1
1	0

Negação (NOT) da afirmação.

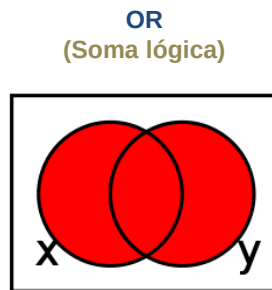
■ Operações Básicas:

- ▶ Boole define ainda três operações básicas: AND, OR, NOT.
- ▶ Considere-se duas variáveis booleanas: $x, y \in \{0,1\}$,
i.e., $x, y \in \{\text{falso}, \text{verdadeiro}\}$

x verdadeiro y verdadeiro



O resultado é verdadeiro se X for verdadeiro **E** (AND) Y for verdadeiro



O resultado é verdadeiro se X for verdadeiro **OU** (OR) Y for verdadeiro



Negação (**NOT**) da afirmação.

■ Álgebra de Boole binária:

- ▶ A extensão ao trabalho de George Boole por Jevons (1869, 1890), Peirce (1880), Schröder (1890) e Huntington (1904), define:

Uma **Álgebra de Boole binária** é um sistema algébrico $B_2 = (A = \{0,1\}, ., +)$ formado por um conjunto gerador A e por duas operações binárias, $.$, $+$, designadas por produto lógico e soma lógica, e por uma operação designada por complemento, tal que:

Propriedade de Fecho: $\forall_{x,y \in A} (x \cdot y \in A) \wedge (x + y \in A)$

O resultado da aplicação de uma ou mais operações básicas sobre o conjunto gerador A, é um valor binário pertencente ao espaço do conjunto gerador A.

■ Propriedades básicas:

Considere-se as variáveis booleanas: $x, y, z \in A$

Identidade	$x + 0 = x$	$x \cdot 1 = x$
Idempotência	$x + x = x$	$x \cdot x = x$
Aniquilação	$x + 1 = 1$	$x \cdot 0 = 0$
Opostos	$x + \bar{x} = 1$	$x \cdot \bar{x} = 0$
Comutatividade	$x + y = y + x$	$x \cdot y = y \cdot x$
Associatividade	$x + (y + z) = (x + y) + z$	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
Distributividade	$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$	$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$
DeMorgan	$\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$	$\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y}$
Adjacência	$x \cdot y + x \cdot \bar{y} = x$	$(x + y) \cdot (x + \bar{y}) = x$

■ Princípio da dualidade:

- Qualquer expressão válida numa álgebra de Boole tem uma expressão dual, também válida nessa álgebra, que se obtém por troca do símbolo operatório $+$ com o símbolo operatório $\cdot$ e do limite universal 0 com o limite universal 1.

Exemplo:

$x \cdot 1 = x$ é a expressão dual de $x + 0 = x$

■ Outros teoremas:

Considere-se as variáveis booleanas: $x, y, z \in A$

Dupla negação	$\overline{\overline{x}} = x$	
Absorção	$x \cdot (x + y) = x$	$x + x \cdot y = x$
Consenso	$x \cdot y + y \cdot z + \overline{x} \cdot z$	$(x + y) \cdot (y + z) \cdot (\overline{x} + z)$
	$=$	$=$
	$x \cdot y + \overline{x} \cdot z$	$(x + y) \cdot (\overline{x} + z)$
	$(x + y) \cdot (\overline{x} + z)$	$x \cdot y + \overline{x} \cdot z$
	$=$	$=$
	$x \cdot z + \overline{x} \cdot y$	$(x + z) \cdot (\overline{x} + y)$
	$x \cdot y + x \cdot \overline{y} \cdot z$	$(x + y) \cdot (x + \overline{y} + z)$
	$=$	$=$
	$x \cdot y + x \cdot z$	$(x + y) \cdot (x + z)$

■ Demonstração das leis de DeMorgan

$$\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$

$$\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$$

Verificação por Tabelas da Verdade

x	y	$x + y$	$\overline{x + y}$	x	$\overline{x}$	y	$\overline{y}$	$\overline{x} \cdot \overline{y}$
0	0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	0	0
1	1	1	0	1	0	0	0	0

► Generalização para n variáveis:

$$\overline{x_1 + x_2 + \dots + x_n} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \dots \cdot \overline{x_n}$$

$$\overline{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} = \overline{x_1} + \overline{x_2} + \dots + \overline{x_n}$$

■ Aplicação sucessiva das leis de DeMorgan

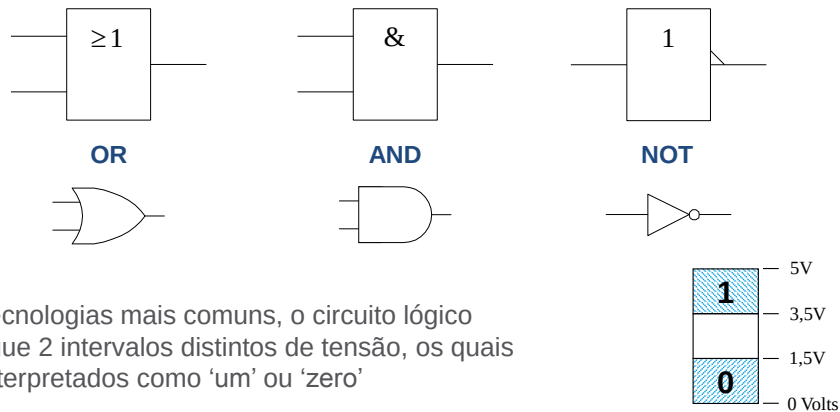
Exemplo:

$$\begin{aligned}
 \overline{a \cdot (b + z \cdot (x + \bar{a}))} &= \bar{a} + \overline{(b + z \cdot (x + \bar{a}))} \\
 &= \bar{a} + \overline{(b \cdot (z \cdot (x + \bar{a})))} \\
 &= \bar{a} + \overline{(b \cdot (z + \overline{(x + \bar{a})}))} \\
 &= \bar{a} + \overline{(b \cdot (z + (\bar{x} \cdot a)))} \\
 &= \bar{a} + \bar{b} \cdot (\bar{z} + \bar{x} \cdot a)
 \end{aligned}$$

■ Portas Lógicas:

- Na prática, os sistemas digitais baseiam-se na Álgebra de Boole, sendo implementados a partir de um conjunto de portas lógicas base.

Simbologia (IEC 617):



- Nas tecnologias mais comuns, o circuito lógico distingue 2 intervalos distintos de tensão, os quais são interpretados como 'um' ou 'zero'

■ Função Booleana (exemplo):

$$f = \bar{a} \cdot b + c$$

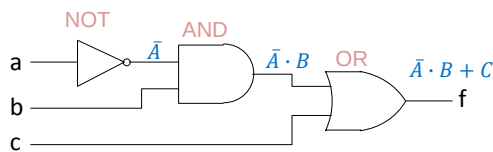
$\bar{a} \cdot b$ e c são os **termos** da função.

$\bar{a}$, b e c são os **literais**.

Tabela da Verdade

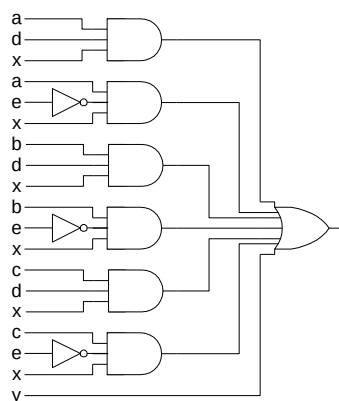
a	b	c	$\bar{a} \cdot b$	f
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
1	1	1	0	1

■ Circuito Lógico:



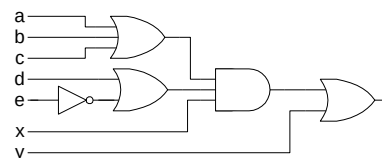
■ Simplificação algébrica

► Exemplo 1:



Realização a 2 níveis
(soma de produtos)

$$\begin{aligned}
 f &= adx + a\bar{e}x + bdx + b\bar{e}x + cdx + c\bar{e}x + y \\
 &= (ad + a\bar{e} + bd + b\bar{e} + cd + c\bar{e})x + y \\
 &= ((a + b + c)d + (a + b + c)\bar{e})x + y \\
 &= ((a + b + c)(d + \bar{e}))x + y \\
 &= (a + b + c) \cdot (d + \bar{e}) \cdot x + y
 \end{aligned}$$

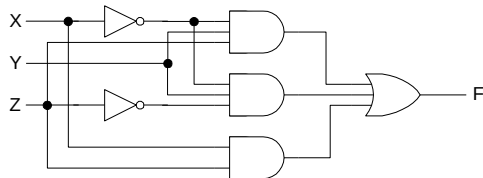


Realização
Multinível

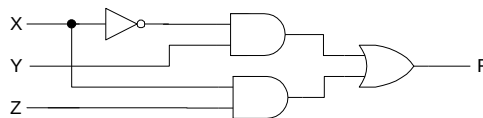
■ Simplificação algébrica

► Exemplo 2:

$$f = \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + xz$$



$$\begin{aligned} f &= \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + xz \\ &= \bar{x}y(z + \bar{z}) + xz \\ &= \bar{x}y.1 + xz \\ &= \bar{x}y + xz \end{aligned}$$



■ Simplificação algébrica:

► A simplificação e manipulação algébrica das funções lógicas tem vários benefícios:

- Permite reduzir a complexidade de circuitos, o que leva a uma redução no número de erros na montagem do circuito.
- Permite reduzir o tempo de propagação dos sinais ao longo do circuito de cálculo (ex.: processadores mais rápidos)
- Permite reduzir a potência consumida (ex: processadores energeticamente mais eficientes)



PRÓXIMA AULA



Próxima Aula

■ Tema da Próxima Aula:

- ▶ Elementos de Tecnologia:
 - Circuitos integrados
 - Famílias lógicas
- ▶ Funções lógicas:
 - Circuitos com portas NAND
 - Circuitos com portas NOR



Agradecimentos

Algumas páginas desta apresentação resultam da compilação de várias contribuições produzidas por:

- Guilherme Arroz
- Horácio Neto
- Nuno Horta
- Pedro Tomás