



TÉCNICO LISBOA

SISTEMAS DIGITAIS (SD)

MEEC

Acetatos das Aulas Teóricas

Versão 4.0 - Português

Aula N° 05:

Título: Funções Lógicas

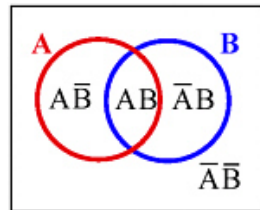
Sumário: Funções lógicas (circuitos com portas NAND e circuitos com portas NOR (revisão)); Representações normalizadas (soma de produtos e produto de somas, mintermos e maxtermos); Funções incompletamente especificadas.

2015/2016

Nuno.Roma@tecnico.ulisboa.pt

Sistemas Digitais (SD)

Funções Lógicas



A	B	Saída
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

Aula Anterior

■ Na aula anterior:

- ▶ Elementos de Tecnologia:
 - Circuitos integrados
 - Famílias lógicas
- ▶ Funções Lógicas:
 - Circuitos com portas NAND
 - Circuitos com portas NOR



SEMANA	TEÓRICA 1	TEÓRICA 2	PROBLEMAS/LABORATÓRIO
14/Set a 19/Set	Introdução	Sistemas de Numeração e Códigos	
21/Set a 26/Set	Álgebra de Boole	Elementos de Tecnologia	P0
28/Set a 3/Out	Funções Lógicas	Minimização de Funções Booleanas (I)	L0
5/Out a 10/Out	Minimização de Funções Booleanas (II)	Def. Circuito Combinatório; Análise Temporal	P1
12/Out a 17/Out	Circuitos Combinatórios (I) – Codif., MUXs, etc.	Circuitos Combinatórios (II) – Som., Comp., etc.	L1
19/Out a 24/Out	Circuitos Combinatórios (III) - ALUs	Circuitos Sequenciais: Latches	P2
26/Out a 31/Out	Circuitos Sequenciais: Flip-Flops	Ling. de Descrição e Simulação de HW (ferramentas disponíveis no laboratório)	L2
2/Nov a 7/Nov	Caracterização Temporal	Registos	P3
9/Nov a 14/Nov	Revisões Teste 1	Contadores	L3
16/Nov a 21/Nov	Síntese de Circuitos Sequenciais: Definições	Síntese de Circuitos Sequenciais: Minimização do número de estados	P4
23/Nov a 28/Nov	Síntese de Circuitos Sequenciais: Síntese com Contadores	Memórias	L4
30/Nov a 5/Dez	Máq. Estado Microprogramadas: Circuito de Dados e Circuito de Controlo	Máq. Estado Microprogramadas: Endereçamento Explícito/Implícito	P5
7/Dez a 12/Dez	Circuitos de Controlo, Transferência e Processamento de Dados de um Processador	Lógica Programável	L5
14/Dez a 18/Dez	P6	P6	L6



■ Tema da aula de hoje:

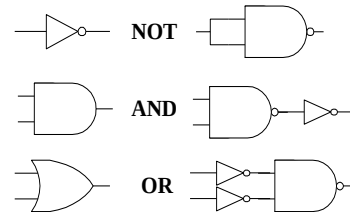
- ▶ Funções lógicas:
 - Circuitos com portas NAND (revisão);
 - Circuitos com portas NOR (revisão);
- ▶ Representações normalizadas:
 - Soma de produtos;
 - Mintermos;
 - Produto de somas;
 - Maxtermos;
- ▶ Funções incompletamente especificadas.

□ Bibliografia:

- M. Mano, C. Kime: Secção 2.3
- G. Arroz, J. Monteiro, A. Oliveira: Secção 2.2

■ Circuitos com portas NAND:

- ▶ A porta NAND é considerada uma porta universal porque qualquer circuito digital pode ser realizado apenas com portas NAND.
- ▶ Qualquer função booleana é realizável apenas com portas NAND por substituição directa das operações NOT, AND e OR.
- ▶ A operação NOT é normalmente considerada em sentido lato, como uma NAND de 1 entrada.
- ▶ Nalgumas tecnologias (p.ex. TTL) as portas NAND são as portas mais simples (portanto mais baratas), pelo que é vantajosa a realização de circuitos só com NANDs.

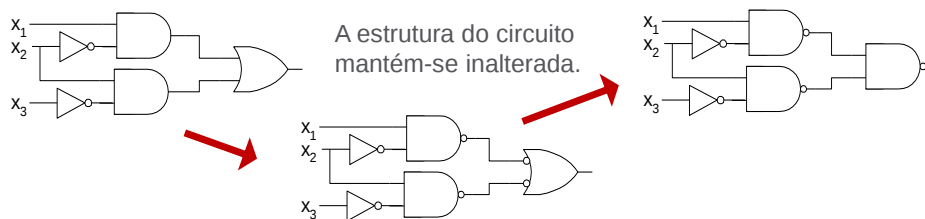


■ Circuitos com portas NAND (cont.):

- ▶ Uma função representada na forma de uma soma de produtos pode ser transformada numa forma directamente realizável apenas com portas NAND por simples aplicação da lei de DeMorgan.

Exemplo:

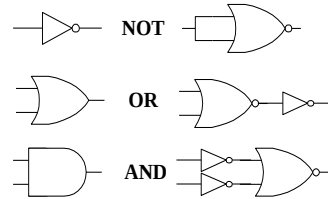
$$f = x_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_3 x_2 = \overline{\overline{x_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_3 x_2}} = \overline{\overline{x_1 \bar{x}_2} \cdot \overline{\bar{x}_3 x_2}} = \overline{(x_1 \text{ nand } \bar{x}_2) \text{ nand } (\bar{x}_3 \text{ nand } x_2)}$$



■ Circuitos com portas NOR:

Dual:

- Qualquer circuito pode ser realizado apenas com portas NOR.
- No caso de a função estar representada como um produto de somas, a transformação mantém a estrutura.



$$g = (x_1 + \bar{x}_2) \cdot (\bar{x}_3 + x_2) = \overline{(x_1 + \bar{x}_2) \cdot (\bar{x}_3 + x_2)} = \overline{(x_1 + \bar{x}_2)} + \overline{(\bar{x}_3 + x_2)} \\ = (x_1 \text{ nor } \bar{x}_2) \text{ nor } (\bar{x}_3 \text{ nor } x_2)$$



■ REPRESENTAÇÃO NORMALIZADA: SOMA DE PRODUTOS

- Designa-se por forma normal **disjuntiva** de uma função booleana simples completamente especificada, $y=f(x_1, x_2, \dots, x_N)$, uma expressão lógica representativa da função com a estrutura de uma soma de produtos.
- Por esta razão, designa-se habitualmente uma forma normal disjuntiva simplesmente por **soma de produtos**.
- Se cada parcela for constituída por um produto lógico envolvendo n literais distintos, diz-se que a função se encontra representada na primeira forma canónica ou **forma canónica disjuntiva**.

Exemplos:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_2 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \quad \leftarrow \text{forma não canónica}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \quad \leftarrow \text{forma canónica}$$

■ MINTERMOS:

- Designa-se por mintermo (também produto canónico, implicante canónico ou termo minimal) um termo de produto em que todas as variáveis aparecem exactamente uma vez, complementadas ou não.

Mintermos para 3 variáveis

x_3	x_2	x_1	mintermo	
0	0	0	$\bar{x}_3 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_1$	m_0
0	0	1	$\bar{x}_3 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_1$	m_1
0	1	0	$\bar{x}_3 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_1$	m_2
0	1	1	$\bar{x}_3 \cdot x_2 \cdot x_1$	m_3
1	0	0	$x_3 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_1$	m_4
1	0	1	$x_3 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_1$	m_5
1	1	0	$x_3 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_1$	m_6
1	1	1	$x_3 \cdot x_2 \cdot x_1$	m_7

Um **mintermo** representa exactamente uma combinação das variáveis binárias na tabela de verdade da função.

Uma função de n variáveis tem 2^n mintermos.

Cada mintermo é também designado por m_i em que o índice i indica o número decimal equivalente à combinação binária por ele representada.

O mintermo vale 1 para a combinação representada, e 0 para todas as outras.

■ REPRESENTAÇÃO NORMALIZADA: PRODUTO DE SOMAS

- Designa-se por forma normal **conjuntiva** de uma função booleana simples completamente especificada, $y=f(x_1, x_2, \dots, x_N)$, uma expressão lógica representativa da função com a estrutura de um produto de somas.
- Por esta razão designa-se habitualmente uma forma normal conjuntiva simplesmente por **produto de somas**.
- Se cada parcela for constituída por uma soma lógica envolvendo n literais distintos, diz-se que a função se encontra representada na segunda forma canónica ou **forma canónica conjuntiva**.

Exemplos:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) \quad \leftarrow \text{forma não canónica}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3) \cdot (x_1 + x_2 + \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) \quad \leftarrow \text{forma canónica}$$

■ MAXTERMOS:

- Designa-se por maxtermo (também soma canónica, implicado canónico ou termo maximal) um termo de soma em que todas as variáveis aparecem exactamente uma vez, complementadas ou não.

Maxtermos para 3 variáveis

x_3	x_2	x_1	maxtermo	
0	0	0	$x_3 + x_2 + x_1$	M_0
0	0	1	$x_3 + x_2 + \bar{x}_1$	M_1
0	1	0	$x_3 + \bar{x}_2 + x_1$	M_2
0	1	1	$x_3 + \bar{x}_2 + \bar{x}_1$	M_3
1	0	0	$\bar{x}_3 + x_2 + x_1$	M_4
1	0	1	$\bar{x}_3 + x_2 + \bar{x}_1$	M_5
1	1	0	$\bar{x}_3 + \bar{x}_2 + x_1$	M_6
1	1	1	$\bar{x}_3 + \bar{x}_2 + \bar{x}_1$	M_7

Um **maxtermo** representa exactamente uma combinação das variáveis binárias na tabela de verdade da função.

Uma função de n variáveis tem 2^n maxtermos.

Cada maxtermo é também designado por M_i em que o índice i indica o número decimal equivalente à combinação binária por ele representada.

O maxtermo vale 0 para a combinação representada, e 1 para todas as outras.

■ MINTERMOS E MAXTERMOS:

- O **mintermo** corresponde a uma função $\neq 0$ com o número mínimo de 1's na tabela da verdade.

Exemplo:

$$f = \bar{x}_3 \cdot x_2 \cdot x_1$$

x_3	x_2	x_1	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

■ MINTERMOS E MAXTERMOS:

- O **maxtermo** corresponde a uma função $\neq 1$ com o número máximo de 1's na tabela da verdade.

Exemplo:

$$f = x_3 + \bar{x}_2 + \bar{x}_1$$

x_3	x_2	x_1	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

■ MINTERMOS E MAXTERMOS:

- Um mintermo e um maxtermo com o mesmo índice são complementos um do outro:

$$m_j = \bar{M}_j$$

x_3	x_2	x_1	mintermo		maxtermo	
0	0	0	$\bar{x}_3 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_1$	m_0	$x_3 + x_2 + x_1$	M_0
0	0	1	$\bar{x}_3 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_1$	m_1	$x_3 + x_2 + \bar{x}_1$	M_1
0	1	0	$\bar{x}_3 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_1$	m_2	$x_3 + \bar{x}_2 + x_1$	M_2
0	1	1	$\bar{x}_3 \cdot x_2 \cdot x_1$	m_3	$x_3 + \bar{x}_2 + \bar{x}_1$	M_3
1	0	0	$x_3 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_1$	m_4	$\bar{x}_3 + x_2 + x_1$	M_4
1	0	1	$x_3 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_1$	m_5	$\bar{x}_3 + x_2 + \bar{x}_1$	M_5
1	1	0	$x_3 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_1$	m_6	$\bar{x}_3 + \bar{x}_2 + x_1$	M_6
1	1	1	$x_3 \cdot x_2 \cdot x_1$	m_7	$\bar{x}_3 + \bar{x}_2 + \bar{x}_1$	M_7

Exemplo:

$$\begin{aligned}
 m_3 &= \bar{x}_3 \cdot x_2 \cdot x_1 \\
 &= \overline{\bar{x}_3 \cdot x_2 \cdot x_1} \\
 &= \overline{\bar{x}_3 + \bar{x}_2 + \bar{x}_1} \\
 &= \bar{M}_3
 \end{aligned}$$

■ TABELA DA VERDADE ↔ SOMA DE PRODUTOS

- Uma função booleana pode ser expressa algebricamente como uma soma de produtos directamente a partir da tabela de verdade.
- A soma inclui todos os mintermos para os quais a função vale 1.

Exemplo:

$$f(x_3, x_2, x_1) = \sum m(0, 1, 3, 5, 7)$$

$$\begin{aligned} f(x_3, x_2, x_1) &= \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_1 && \leftarrow m_0 \\ &+ \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_1 && \leftarrow m_1 \\ &+ \bar{x}_3 \cdot x_2 \cdot x_1 && \leftarrow m_3 \\ &+ x_3 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_1 && \leftarrow m_5 \\ &+ x_3 \cdot x_2 \cdot x_1 && \leftarrow m_7 \end{aligned}$$

x_3	x_2	x_1	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

■ SOMA DE PRODUTOS ↔ PRODUTO DE SOMAS

- Conversão entre formas canónicas: o produto de somas utiliza os maxtermos correspondentes aos mintermos não utilizados na soma de produtos.
- É equivalente a aplicar a lei de DeMorgan ao complemento da função.

Exemplo:

x_3	x_2	x_1	f	$\bar{f}$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	1	1	0

$$f(x_3, x_2, x_1) = m_0 + m_1 + m_3 + m_5 + m_7$$

$$\bar{f}(x_3, x_2, x_1) = m_2 + m_4 + m_6$$

$$\begin{aligned} f(x_3, x_2, x_1) &= \overline{m_2 + m_4 + m_6} = \bar{m}_2 \cdot \bar{m}_4 \cdot \bar{m}_6 \\ &= M_2 \cdot M_4 \cdot M_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &= \overline{\bar{x}_3 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_1 + x_3 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_1 + x_3 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_1} \\ &= (\bar{x}_3 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_1) \cdot (x_3 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_1) \cdot (x_3 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_1) \\ &= (x_3 + \bar{x}_2 + x_1) \cdot (\bar{x}_3 + x_2 + x_1) \cdot (\bar{x}_3 + \bar{x}_2 + x_1) \end{aligned}$$

■ TABELA DA VERDADE ↔ PRODUTO DE SOMAS

- Uma função booleana pode ser expressa algebricamente, como um produto de somas, directamente a partir da tabela de verdade.
- O produto inclui todos os maxterms para os quais a função vale 0.

Exemplo:

$$f(x_3, x_2, x_1) = \prod M(2, 4, 6)$$

$$\begin{aligned} f(x_3, x_2, x_1) &= (x_3 + \bar{x}_2 + x_1) \leftarrow M_2 \\ &\cdot (\bar{x}_3 + x_2 + x_1) \leftarrow M_4 \\ &\cdot (\bar{x}_3 + \bar{x}_2 + x_1) \leftarrow M_6 \end{aligned}$$

x_3	x_2	x_1	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

■ FUNÇÕES INCOMPLETAMENTE ESPECIFICADAS

Exemplo: Função que detecta se um número, no intervalo [1,6], é múltiplo de 3.

x_3	x_2	x_1	f
0	0	0	X
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	X

A função toma o valor 'X' (às vezes também representado por '-') para cada uma das combinações das entradas que nunca ocorrerão.

Realidade Física: 'X' não existe, apenas existem '0' ou '1'.

X – "don't care": não nos preocupamos com o comportamento do circuito para os valores fora do intervalo, portanto podemos escolher para cada 'X' o valor mais adequado entre '0' ou '1'.

Representação:

$$\begin{aligned} f(x_3, x_2, x_1) &= \sum m(3, 6) + \sum m_d(0, 7) \\ &= m_3 + m_6 + m_{d0} + m_{d7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_3, x_2, x_1) &= \prod M(1, 2, 4, 5) \cdot \prod M_d(0, 7) \\ &= M_1 \cdot M_2 \cdot M_4 \cdot M_5 \cdot M_{d0} \cdot M_{d7} \end{aligned}$$

■ FUNÇÕES INCOMPLETAMENTE ESPECIFICADAS (cont.)

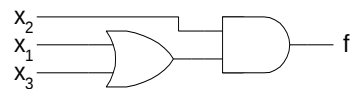
Exemplo:

x_3	x_2	x_1	f	$\rightarrow g$
0	0	0	X	$\rightarrow 0$
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	X	$\rightarrow 1$

Estratégia: para cada 'X' escolhemos '0' ou '1' de acordo com os objectivos do projecto (habitualmente, maior simplificação).

Neste caso, a solução mais simples corresponde a substituir o primeiro 'X' por '0' e o segundo por '1'.

$$\begin{aligned}
 f \rightarrow g(x_3, x_2, x_1) &= \sum m(3, 6, 7) = \prod M(0, 1, 2, 4, 5) \\
 &= x_2 x_1 + x_3 x_2 \\
 &= x_2 (x_1 + x_3)
 \end{aligned}$$



PRÓXIMA AULA



■ Tema da Próxima Aula:

- ▶ Minimização algébrica
- ▶ Minimização de Karnaugh:
 - Representação de funções de n variáveis:
 - Quadros de 3 e 4 variáveis;
 - Quadros de n variáveis;
 - Agrupamentos de uns e zeros:
 - Eixos de simetria;
 - Implicantes e implicados;
 - Implicantes e implicados primos;
 - Implicantes e implicados primos essenciais.



Agradecimentos

Algumas páginas desta apresentação resultam da compilação de várias contribuições produzidas por:

- Guilherme Arroz
- Horácio Neto
- Nuno Horta
- Pedro Tomás