



TÉCNICO LISBOA

SISTEMAS DIGITAIS (SD)

MEEC

Acetatos das Aulas Teóricas

Versão 4.0 - Português

Aula Nº 07:

Título: Minimização de Funções Booleanas - II

Sumário: Minimização de Karnaugh (agrupamentos de uns e zeros, eixos de simetria, implicantes e implicados, implicantes e implicados primos, implicantes e implicados primos essenciais); Método de minimização de Karnaugh (algoritmo de minimização, forma normal/mínima disjuntiva, forma normal/mínima conjuntiva, funções incompletamente especificadas).

2015/2016

Nuno.Roma@tecnico.ulisboa.pt

Sistemas Digitais (SD)

Minimização de Funções Booleanas



		YZ			
		00	01	11	10
wx	00	0	0	0	0
	01	1	1	1	1
	11	1	1	1	1
	10	0	0	0	0

		AB			
		00	01	11	10
CD	10	1	1		1
	11	1	1		1
	01	1	1		1
	00	1	1		

Aula Anterior

■ Na aula anterior:

- ▶ Minimização algébrica
- ▶ Minimização de Karnaugh:
 - Representação de funções de n variáveis:
 - Quadros de 3 e 4 variáveis;
 - Quadros de n variáveis;
 - Agrupamentos de uns e zeros:
 - Eixos de simetria;
 - Implicantes e implicados;
 - Implicantes e implicados primos;
 - Implicantes e implicados primos essenciais.

SEMANA	TEÓRICA 1	TEÓRICA 2	PROBLEMAS/LABORATÓRIO
14/Set a 19/Set	Introdução	Sistemas de Numeração e Códigos	
21/Set a 26/Set	Álgebra de Boole	Elementos de Tecnologia	P0
28/Set a 3/Out	Funções Lógicas	Minimização de Funções Booleanas (I)	L0
5/Out a 10/Out	Minimização de Funções Booleanas (II)	Def. Circuito Combinatório; Análise Temporal	P1
12/Out a 17/Out	Circuitos Combinatórios (I) – Codif., MUXs, etc.	Circuitos Combinatórios (II) – Som., Comp., etc.	L1
19/Out a 24/Out	Circuitos Combinatórios (III) - ALUs	Circuitos Sequenciais: Latches	P2
26/Out a 31/Out	Circuitos Sequenciais: Flip-Flops	Ling. de Descrição e Simulação de HW (ferramentas disponíveis no laboratório)	L2
2/Nov a 7/Nov	Caracterização Temporal	Registos	P3
9/Nov a 14/Nov	Revisões Teste 1	Contadores	L3
16/Nov a 21/Nov	Síntese de Circuitos Sequenciais: Definições	Síntese de Circuitos Sequenciais: Minimização do número de estados	P4
23/Nov a 28/Nov	Síntese de Circuitos Sequenciais: Síntese com Contadores	Memórias	L4
30/Nov a 5/Dez	Máq. Estado Microprogramadas: Circuito de Dados e Circuito de Controlo	Máq. Estado Microprogramadas: Endereçamento Explícito/Implícito	P5
7/Dez a 12/Dez	Circuitos de Controlo, Transferência e Processamento de Dados de um Processador	Lógica Programável	L5
14/Dez a 18/Dez	P6	P6	L6

■ Tema da aula de hoje:

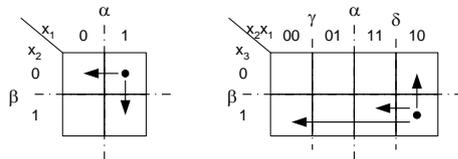
- ▶ Minimização de Karnaugh:
 - Agrupamentos de uns e zeros:
 - Eixos de simetria;
 - Implicantes e implicados;
 - Implicantes e implicados primos;
 - Implicantes e implicados primos essenciais.
 - Método de minimização de Karnaugh:
 - Algoritmo de minimização;
 - Forma normal/mínima disjuntiva;
 - Forma normal/mínima conjuntiva;
 - Funções incompletamente especificadas.

□ Bibliografia:

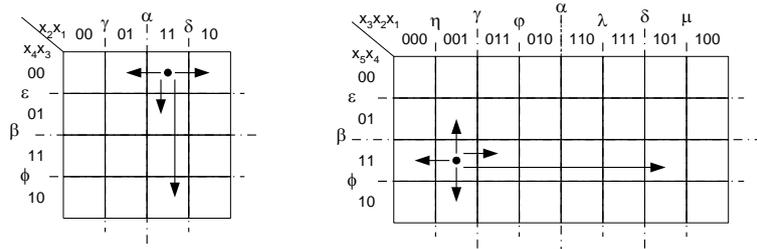
- M. Mano, C. Kime: Secções 2.4 e 2.5
- G. Arroz, J. Monteiro, A. Oliveira: Secção 2.3

■ AGRUPAMENTO DE MINTERMOS E MAXTERMOS

► Eixos de Simetria:



2 **quadrados** dizem-se **adjacentes** em termos lógicos quando apenas uma variável lógica altera o seu valor na representação desses quadrados.

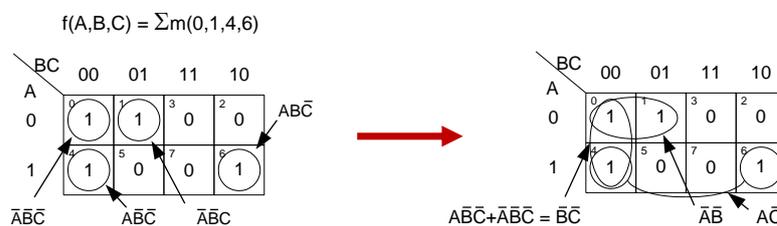


Num quadro de N variáveis, para cada quadrado existem sempre N outros adjacentes

■ AGRUPAMENTO DE MINTERMOS E MAXTERMOS (cont.)

► Um **termo de produto** diz-se um **implicante** da função sse essa função assume 1 para todos os mintermos que o constituem.

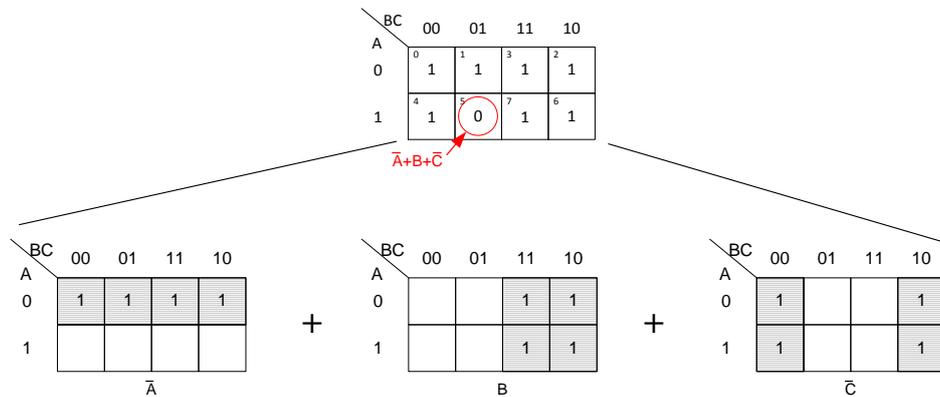
Exemplos:



Agrupamentos de 2ⁿ quadrados correspondem à eliminação de n literais

■ AGRUPAMENTO DE MINTERMOS E MAXTERMOS (cont.)

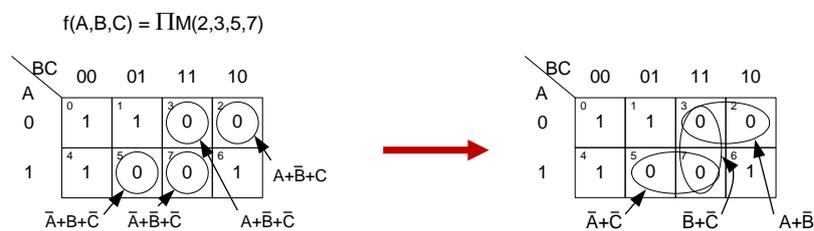
► Exemplos da representação de **Maxtermos**:



■ AGRUPAMENTO DE MINTERMOS E MAXTERMOS (cont.)

► Um **termo de soma** diz-se um **implicado** da função sse essa função assume 0 para todos os maxtermos que o constituem.

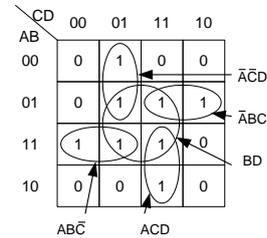
Exemplos:



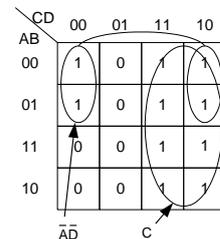
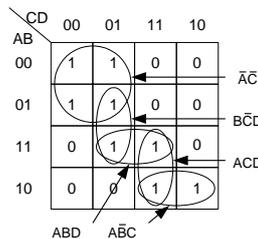
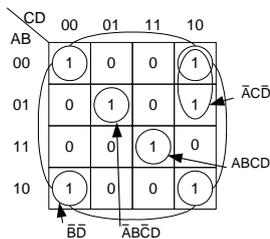
Agrupamentos de 2^n quadrados correspondem à eliminação de n literais

■ AGRUPAMENTO DE MINTERMOS E MAXTERMOS (cont.)

- ▶ Um termo de produto diz-se um **implicante primo** se a remoção de um qualquer literal, desse termo de produto, resulta num termo de produto que não é um implicante da função.

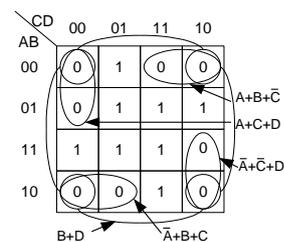


Exemplos:

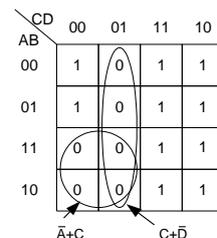
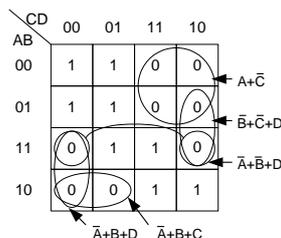
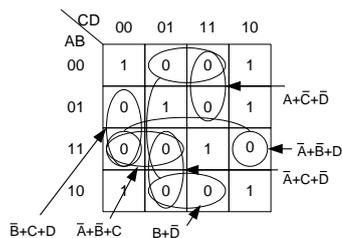


■ AGRUPAMENTO DE MINTERMOS E MAXTERMOS (cont.)

- ▶ Um termo de soma diz-se um **implicado primo** se a remoção de um qualquer literal, desse termo de soma, resulta num termo de soma que não é um implicado da função.



Exemplos:

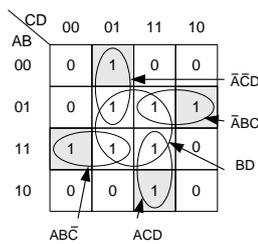


■ AGRUPAMENTO DE MINTERMOS E MAXTERMOS (cont.)

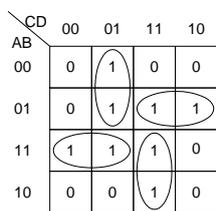
- Um implicante primo de uma função diz-se **implicante primo essencial** se contém pelo menos um mintermo não contido em nenhum outro implicante primo.

Exemplos:

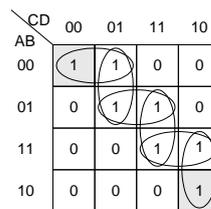
Implicantes Primos



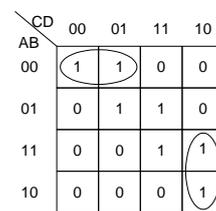
Implicantes Primos Essenciais



Implicantes Primos



Implicantes Primos Essenciais

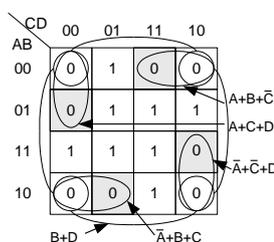


■ AGRUPAMENTO DE MINTERMOS E MAXTERMOS (cont.)

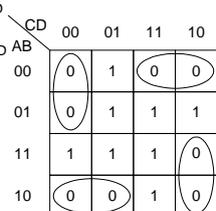
- Um implicado primo de uma função diz-se **implicado primo essencial** se contém pelo menos um maxtermo não contido em nenhum outro implicado primo.

Exemplos:

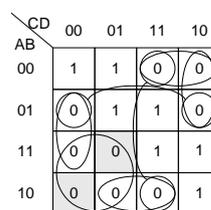
Implicados Primos



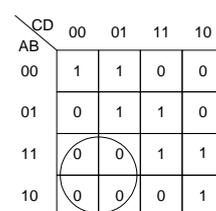
Implicados Primos Essenciais



Implicados Primos



Implicados Primos Essenciais



MÉTODO DE MINIMIZAÇÃO DE KARNAUGH

▶ Algoritmo de Minimização:

O procedimento sistemático para a obtenção da expressão simplificada de uma função representada num quadro de Karnaugh corresponde à execução dos seguintes passos:

Passo 1: Identificação de todos os **implicantes/implicados primos essenciais**.

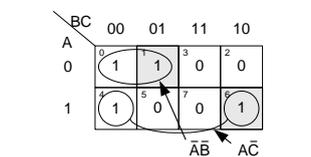
Passo 2: Determinação do **menor conjunto de implicantes/implicados primos** que contenham os mintermos/maxtermos não incluídos nos implicantes/implicados primos essenciais identificados no passo anterior.

Passo 3: **Escrita da expressão simplificada** como soma/produto de todos os termos de produto/soma seleccionados nos passos 1 e 2.

MÉTODO DE MINIMIZAÇÃO DE KARNAUGH (cont.)

▶ **Forma Normal/Mínima Disjuntiva:** funções cuja simplificação utiliza apenas implicantes primos essenciais.

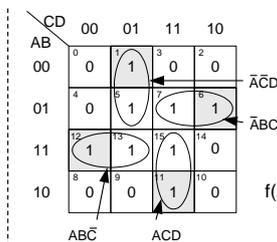
Exemplos:



$$f(A,B,C) = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C$$



$$f(A,B,C) = \bar{A}\bar{B} + A\bar{C}$$



$$f(A,B,C,D) = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}BC\bar{D} + \bar{A}BCD$$



$$f(A,B,C,D) = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC$$

MÉTODO DE MINIMIZAÇÃO DE KARNAUGH (cont.)

Exemplos:

$$f(A,B,C,D) = \Sigma m(0,1,5,7,10,14,15)$$

$$= \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}BC\bar{D} + \bar{A}BCD$$

$$+ A\bar{B}\bar{C}D + ABC\bar{D} + ABCD$$

CD	00	01	11	10
AB	0	1	1	0
00	0	1	1	0
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

CD	00	01	11	10
AB	0	1	3	2
00	1	1	0	0
01	4	5	1	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

$$f(A,B,C,D) = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}D + ABC + AC\bar{D}$$

Soluções alternativas

CD	00	01	11	10
AB	0	1	3	2
00	1	1	0	0
01	4	5	1	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

$$f(A,B,C,D) = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{C}D + BCD + AC\bar{D}$$

O conjunto de implicantes primos essenciais é único.

O conjunto de implicantes primos não essenciais que completam a expressão simplificada oferece várias alternativas.

MÉTODO DE MINIMIZAÇÃO DE KARNAUGH (cont.)

Exemplos:

CDE	000	001	011	010	110	111	101	100
AB	0	1	3	2	6	7	5	4
00	0	1	0	0	1	1	0	1
01	8	9	11	10	14	15	13	12
11	24	25	27	26	30	31	29	28
10	16	17	19	18	22	23	21	20

CDE	000	001	011	010	110	111	101	100
AB	0	1	3	2	6	7	5	4
00	1	0	0	1	0	1	0	1
01	8	9	11	10	14	15	13	12
11	24	25	27	26	30	31	29	28
10	16	17	19	18	22	23	21	20

Expressão Original:
- 15 Termos de Produto de 5 Literais

Expressão Simplificada:
- 6 Termos de Produto de 4 Literais
- 1 Termo de Produto de 3 Literais

CDE	000	001	011	010	110	111	101	100
AB	0	1	3	2	6	7	5	4
00	1	0	0	1	0	1	0	1
01	8	9	11	10	14	15	13	12
11	24	25	27	26	30	31	29	28
10	16	17	19	18	22	23	21	20

■ MÉTODO DE MINIMIZAÇÃO DE KARNAUGH (cont.)

► Forma Normal/Mínima Conjuntiva:

$$f(A,B,C,D) = \Pi M(2,3,4,6,8,9,11,12,13)$$

$$= (A+B+\bar{C}+D). (A+B+\bar{C}+\bar{D}). (A+\bar{B}+C+D).$$

$$(A+\bar{B}+\bar{C}+D). (\bar{A}+B+C+D). (\bar{A}+B+C+\bar{D}).$$

$$(\bar{A}+B+\bar{C}+D). (\bar{A}+\bar{B}+C+D). (\bar{A}+\bar{B}+C+\bar{D})$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	4	0	1	0
11	12	0	0	1
10	8	0	0	1

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	4	0	1	0
11	12	0	0	1
10	8	0	0	1

$$f(A,B,C,D) = (\bar{A}+C).(A+B+\bar{C}).(A+\bar{B}+D).(\bar{A}+B+\bar{D})$$

Soluções alternativas

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	4	0	1	0
11	12	0	0	1
10	8	0	0	1

$$f(A,B,C,D) = (\bar{A}+C).(\bar{B}+C+D).(B+\bar{C}+\bar{D}).(A+\bar{C}+D)$$

O conjunto de implicados primos essenciais é único.

O conjunto de implicados primos não essenciais que completam a expressão simplificada oferece várias alternativas.

■ MÉTODO DE MINIMIZAÇÃO DE KARNAUGH (cont.)

► Algoritmo de Minimização (Funções Incompletamente Especificadas):

O procedimento sistemático para a obtenção da expressão simplificada de uma função representada num quadro de Karnaugh corresponde execução dos seguintes passos:

Passo 1: Identificação de todos os **implicantes/implicados primos essenciais**.*

Passo 2: Determinação do **menor conjunto de implicantes/implicados primos** que contenham os mintermos/maxtermos não incluídos nos implicantes/implicados primos essenciais identificados no passo anterior.*

Passo 3: **Escrita da expressão simplificada** como soma/produto de todos os termos de produto/soma seleccionados nos passos 1 e 2.

* **Incluindo as indeterminações** sempre que isso permita reduzir o número de literais presentes nesse implicante/implicado.

■ MÉTODO DE MINIMIZAÇÃO DE KARNAUGH (cont.)

► Funções Incompletamente Especificadas:

Exemplos:

$$f(A,B,C,D) = \sum m(0,1,5,7,10,14,15) + \sum m_d(8,13) \\ = \Pi M(2,3,4,6,9,11,12) \cdot \Pi M_d(8,13)$$

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	1	1	0	0
	01	0	1	1	0
	11	0	x	1	1
	10	x	0	0	1



		CD			
		00	01	11	10
AB	00	1	1	0	0
	01	0	1	1	0
	11	0	x	1	1
	10	x	0	0	1

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	1	1	0	0
	01	0	1	1	0
	11	0	x	1	1
	10	x	0	0	1

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	1	1	0	0
	01	0	1	1	0
	11	0	x	1	1
	10	x	0	0	1

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	1	1	0	0
	01	0	1	1	0
	11	0	x	1	1
	10	x	0	0	1

■ MÉTODO DE MINIMIZAÇÃO DE KARNAUGH (cont.)

Exemplos:

		CDE							
		000	001	011	010	110	111	101	100
AB	00	x	0	0	1	0	1	0	0
	01	x	1	1	x	x	1	x	x
	11	0	x	x	0	0	1	x	0
	10	1	0	0	1	0	1	0	0



		CDE							
		000	001	011	010	110	111	101	100
AB	00	x	0	0	1	0	1	0	0
	01	x	1	1	x	x	1	x	x
	11	0	x	x	0	0	1	x	0
	10	1	0	0	1	0	1	0	0

...

ou

		CDE							
		000	001	011	010	110	111	101	100
AB	00	x	0	0	1	0	1	0	0
	01	x	1	1	x	x	1	x	x
	11	0	x	x	0	0	1	x	0
	10	1	0	0	1	0	1	0	0

		CDE							
		000	001	011	010	110	111	101	100
AB	00	x	0	0	1	0	1	0	0
	01	x	1	1	x	x	1	x	x
	11	0	x	x	0	0	1	x	0
	10	1	0	0	1	0	1	0	0



■ Tema da Próxima Aula:

- ▶ Noção de circuito combinatório;
- ▶ Tempo de propagação num circuito;
- ▶ Dispositivos lógicos especiais:
 - Buffer de três estados (*tri-state*);
 - Portas de passagem (*transmission gates*).



Agradecimentos

Algumas páginas desta apresentação resultam da compilação de várias contribuições produzidas por:

- Guilherme Arroz
- Horácio Neto
- Nuno Horta
- Pedro Tomás