

83. Calcule os integrais iterados das funções, nos rectângulos indicados:

- a. $f(x, y) = \frac{1}{2x + y + 3}$ e $\mathcal{R} = [0, 2] \times [0, 1]$
- b. $f(x, y) = x^2 - y^3 + xy^2$ e $\mathcal{R} = [0, 1] \times [0, 1]$
- c. $f(x, y) = \sin^2 x$ e $\mathcal{R} = [-5\pi, 3\pi] \times [-2, 3]$
- d. $f(x, y) = x\sqrt{x^2 + y}$ e $\mathcal{R} = [0, 1] \times [0, 3]$

84. Inverta a ordem de integração dos integrais seguintes:

a. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y) dy dx$ b. $\int_0^1 \int_0^{\arccos(x)} f(x, y) dy dx$

85. Calcule:

a. $\int_0^2 \int_y^1 \sin(x^2) dx dy$ b. $\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dx dy$

c. $\int_0^1 \int_{y^2}^1 \sqrt{x} e^{x^2} dx dy$ d. $\int_0^3 \int_{\frac{y}{3}}^{\sqrt{4-y}} \frac{1}{1+x^2} dx dy$

86. Calcule $\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy$, onde:

- a. $f(x, y) = x + y$ e $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$
- b. $f(x, y) = xy$ e $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x \leq 1\}$
- c. $f(x, y) = \frac{y}{9 + x^2}$ e $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \wedge y \leq 0 \wedge x^2 + y^2 \leq 9\}$

87. Considere no plano YOZ o conjunto \mathcal{C} dos pontos que satisfazem $yz = 1$, com $z > 0$. Seja \mathcal{S} a superfície obtida por revolução de \mathcal{C} em torno do eixo OZ .

- a. Para $a > 1$, calcule o volume V_a do sólido limitado por \mathcal{S} e pelos planos de equação $z = 1$ e $z = a$.
- b. Mostre que existe $\lim_{a \rightarrow +\infty} V_a$, calculando o respectivo valor.

88. Calcule o volume do sólido \mathcal{S} :

- a. Limitado pelo plano de equação $x + 2y + 3z = 6$ e pelos planos coordenados;
- b. Limitado pelo cilindro de equação $x^2 + y^2 = 1$, pelo plano XOY e pelo plano de equação $z = 4 - y$;
- c. Limitado pelos cilindros de equação $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + z^2 = 1$;
- d. Do primeiro octante, limitado pelo cilindro parabólico $z = x^2$ e pelos planos de equação $x = 2y$ e $x = 2$.

89. Utilizando coordenadas polares, calcule o valor dos seguintes integrais:

- a. $\iint_{\mathcal{D}} e^{x^2+y^2} dx dy$, onde $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$;
- b. $\iint_{\mathcal{D}} \log(x^2 + y^2) dx dy$, onde $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$;
- c. $\iint_{\mathcal{D}} e^{x^2} dx dy$, onde $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3 \wedge 0 \leq y \leq \frac{x}{2}\}$;
- d. $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_y^{\sqrt{9-y^2}} x dx dy$;
- e. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \log(1 + x^2 + y^2) dy dx$.

90. Calcule a área da região do plano:

- a. Limitada pela elipse de equação $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$;
- b. Localizada no primeiro quadrante e limitada pelas elipses de equação $x^2 + 2y^2 = 1$, $x^2 + 2y^2 = 4$ e pelas rectas $y = x$ e $y = \sqrt{3}x$;
- c. Que satisfaz as inequações $x^2 + y^2 \geq 1$ e $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$.

91. Calcule o volume do sólido \mathcal{S} :

- a. Limitado superiormente pela esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ e inferiormente pelo parabolóide de equação $z = x^2 + y^2$;
- b. Limitado pelas superfícies de equação $z = x^2 + y^2$ e $x^2 + y^2 = 4$, com $z \geq 0$;
- c. Limitado pelos cilindros de equação $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 9$ e os planos $z = 2$ e $z = -3$;
- d. Compreendido entre os parabolóides $3z = 4 - x^2 - y^2$ e $z = x^2 + y^2$;
- e. Limitado inferiormente pela superfície de equação $z = x^2 + y^2$ e superiormente por $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{15}{4}$, com $z \geq 1$.

92. Calcule os integrais $\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy$, recorrendo à mudança de variáveis sugerida.

- a. $f(x, y) = x^2 + y^2$ onde $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \leq 1\}$, considerando $x = u + v$ e $y = u - v$;
- b. $f(x, y) = e^{\frac{y}{x+y}}$ onde $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x + y \leq 1\}$, considerando $x + y = u$ e $y = uv$;
- c. $f(x, y) = x^2 + y^2$ onde $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 3x \wedge 1 \leq xy \leq 2\}$, considerando $x = \sqrt{\frac{u}{v}}$ e $y = \sqrt{uv}$.