

26. a.

$$\text{i. } D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x^2 - y^2 \geq 0 \wedge x^2 - y^2 > 0\}$$

$$\text{int}(D_1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \wedge x^2 - y^2 > 0\}$$

$$\text{fr}(D_1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2 = 1 \wedge x^2 - y^2 > 0) \vee (x^2 + y^2 \leq 1 \wedge x^2 - y^2 = 0)\}$$

$$\bar{D}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x^2 - y^2 \geq 0 \wedge x^2 - y^2 \geq 0\}$$

D_1 não é um conjunto aberto, nem é um conjunto fechado

$$\text{ii. } D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x + 1 > 0 \wedge \arctan(x^2 + y^2) \neq 0 \wedge -1 \leq \frac{y}{x} \leq 1 \wedge x \neq 0\}$$

$$\text{int}(D_2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 1 \wedge -1 < \frac{y}{x} < 1\}$$

$$\text{fr}(D_2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x = 1 \wedge -1 \leq y \leq 1) \vee y = x \vee y = -x\}$$

$$\bar{D}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq \frac{y}{x} \leq 1\} \cup \{(0, 0)\}$$

D_2 não é um conjunto aberto, nem é um conjunto fechado

$$\text{iii. } D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge y + x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\text{int}(D_3) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge y + x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\text{fr}(D_3) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (y - x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee y + x = \frac{\pi}{2} + k\pi) \wedge k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\bar{D}_3 = \mathbb{R}^2$$

D_3 é um conjunto aberto

$$\text{iv. } D_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x + 2y^2 - 3 \geq 0\}$$

$$\text{int}(D_4) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x + 2y^2 - 3 > 0\}$$

$$\text{fr}(D_4) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x + 2y^2 - 3 = 0\}$$

$$\bar{D}_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x + 2y^2 - 3 \geq 0\}$$

D_4 é um conjunto fechado

$$\text{v. } D_5 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) > 0 \wedge x^2 + y^2 > 0 \right\}$$

$$\text{int}(D_5) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) > 0 \wedge x^2 + y^2 > 0 \right\}$$

$$\text{fr}(D_5) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0 \right\} \cup \{(0, 0)\}$$

$$\bar{D}_5 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \geq 0 \right\} \cup \{(0, 0)\}$$

D_5 é um conjunto aberto

$$\text{vi. } D_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 + 6x - 10 \geq 0\}$$

$$\text{int}(D_6) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 + 6x - 10 > 0\}$$

$$\text{fr}(D_6) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 + 6x - 10 = 0\}$$

$$\bar{D}_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 + 6x - 10 \geq 0\}$$

D_6 é um conjunto fechado

vii. $D_7 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sin(x - y) \neq 0 \wedge xy > 0\}$
 $\text{int}(D_7) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sin(x - y) \neq 0 \wedge xy > 0\}$
 $\text{fr}(D_7) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (\sin(x - y) = 0 \wedge xy \geq 0) \vee x = 0 \vee y = 0\}$
 $\bar{D}_7 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$
 D_7 é um conjunto aberto

viii. $D_8 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy - 1 > 0 \wedge (x - 1)^2 + (y - 1)^2 - 2 > 0\}$
 $\text{int}(D_8) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy - 1 > 0 \wedge (x - 1)^2 + (y - 1)^2 - 2 > 0\}$
 $\text{fr}(D_8) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (xy = 1 \wedge (x - 1)^2 + (y - 1)^2 - 2 \geq 0) \vee$
 $(xy > 1 \wedge (x - 1)^2 + (y - 1)^2 - 2 = 0)\}$
 $\bar{D}_8 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy - 1 \geq 0 \wedge (x - 1)^2 + (y - 1)^2 - 2 \geq 0\}$
 D_8 é um conjunto aberto

ix. $D_9 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4 - x^2 - y^2 \geq 0 \wedge 4 - x^2 - y^2 + z > 0\}$
 $\text{int}(D_9) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4 - x^2 - y^2 > 0 \wedge 4 - x^2 - y^2 + z > 0\}$
 $\text{fr}(D_9) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (4 - x^2 - y^2 = 0 \wedge 4 - x^2 - y^2 + z \geq 0) \vee$
 $(4 - x^2 - y^2 \leq 0 \wedge 4 - x^2 - y^2 + z = 0)\}$
 $\bar{D}_9 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4 - x^2 - y^2 \geq 0 \wedge 4 - x^2 - y^2 + z \geq 0\}$
 D_9 não é um conjunto aberto, nem é um conjunto fechado

x. $D_{10} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{9} + z^2 + 2z > 0 \wedge y \geq 0\}$
 $\text{int}(D_{10}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{9} + z^2 + 2z > 0 \wedge y > 0\}$
 $\text{fr}(D_{10}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x^2 + \frac{y^2}{9} + z^2 + 2z = 0 \wedge y \geq 0) \vee (y = 0 \wedge x^2 + (z + 1)^2 \geq 1)\}$
 $D_{10} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{9} + z^2 + 2z > 0 \wedge y \geq 0\}$
 D_{10} não é um conjunto aberto, nem é um conjunto fechado

b. Por exemplo, $u_n = (1 + \frac{1}{n}, 0)$, com $n \in \mathbb{N}$.

c. Por exemplo, $u_n = (\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}, 0)$, com $n \in \mathbb{N}$.

28.

- a.** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y^2 \neq 0\}$
- b.** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\}$
- c.** $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - 1 \neq 0\}$
- d.** $D = \mathbb{R}^2$

29. Os limites direccionais de g na origem são iguais a 0. O limite de g na origem, segundo a parábola $y = x^2$, é igual a $\frac{1}{2}$. Conclui-se então que não existe o limite de g no ponto $(0, 0)$.

30.

- | | | |
|----------------------|----------------------|----------------------|
| a. não existe | b. 0 | c. 2 |
| d. não existe | e. 0 | f. não existe |
| g. 0 | h. não existe | i. não existe |
| j. 0 | k. não existe | l. não existe |

31. Não é possível definir um prolongamento por continuidade, desta função à origem.

32.e. Uma função linear $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua se e só se

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, |f(x)| \leq M\|x\|,$$

onde $M > 0$ é uma constante real fixa.

33.

- a.** f é contínua em $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a \neq b\} \cup \{(0, 0), (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})\}$
- b.** g é contínua em \mathbb{R}^2

34.

- a.** f é contínua em $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$
- b.** g é contínua em \mathbb{R}^2
- c.** h é contínua em $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| \neq 1\}$