Superfícies Quádricas

O gráfico a três dimensões de uma equação de 2º grau em x, y e z

$$\mathbf{Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0}$$

é chamado uma **quádrica**.

Quádricas Degeneradas

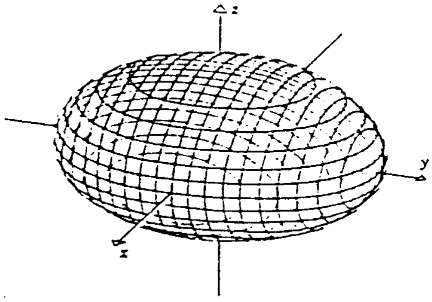
- **nenhum ponto:** $x^2+y^2+z^2+1=0$
- **um único ponto:** $x^2+2y^2+3z^2=0 \Leftrightarrow (x,y,z)=(0,0,0)$
- **uma recta:** $x^2+y^2=0 \Leftrightarrow$ eixo dos zz
- **um plano:** $z^2=0 \Leftrightarrow z=0$ (plano dos XOY)
- **dois planos:** $x^2-y^2=0 \Leftrightarrow (x-y=0) \vee (x+y=0)$

As equações que vamos ver aplicam-se apenas às superfícies quádricas nas posições mostradas. Quando as superfícies sofrem uma rotação ou translação daquelas posições as equações mudam. Supomos a, b e c constantes positivas.

Classificação de quádricas

Elipsóide

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$$

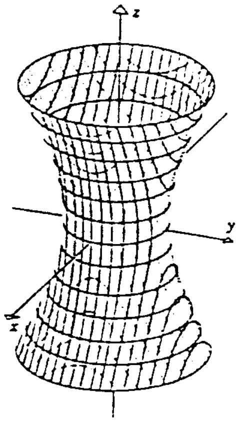


- centrado na origem
- pontos de intersecção com os eixos coordenados: $(\pm a,0,0)$, $(0,\pm b,0)$, $(0,0,\pm c)$
- secções paralelas ao plano XY: elipses
- secções paralelas ao plano XZ: elipses
- secções paralelas ao plano YZ: elipses

a, b, c $\rightarrow$ semieixos do elipsóide

Se dois dos semieixos são iguais obtemos um elipsóide de revolução.
Se todos os semieixos são iguais obtemos uma esfera.

Hiperboloide de uma folha

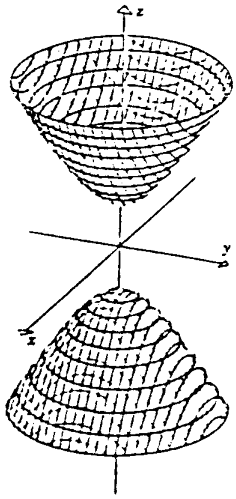


$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1}$$

- centrado na origem
- pontos de intersecção com os eixos coordenados: $(\pm a,0,0)$, $(0,\pm b,0)$
- secções paralelas ao plano XY: elipses
- secções paralelas ao plano XZ: hipérboles
- secções paralelas ao plano YZ: hipérboles

Se a = b obtemos um hiperboloide de revolução.

Hiperboloide de duas folhas



$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1}$$

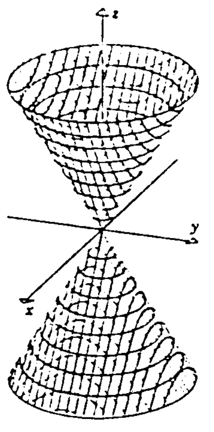
- centrado na origem
- pontos de intersecção com os eixos coordenados: $(0,0,\pm c)$
- secções paralelas ao plano XY: elipses
- secções paralelas ao plano XZ: hipérboles
- secções paralelas ao plano YZ: hipérboles

Se a = b obtemos um hiperboloide de revolução.

Cone elíptico

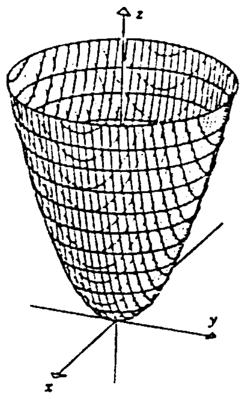
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0}$$

- pontos de intersecção com os eixos coordenados: $(0,0,0)$
- secções paralelas ao plano XY: z =0 (0,0,0)
  caso contrário elipses
- secções paralelas ao plano XZ: y =0 duas rectas concorrentes
  caso contrário hipérboles
- secções paralelas ao plano YZ: x =0 duas rectas concorrentes
  caso contrário hipérboles



Se a = b obtemos um cone de revolução.

Paraboloide elíptico



$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}}$$

- secções paralelas ao plano XY: elipses
- secções paralelas ao plano XZ: parábolas
- secções paralelas ao plano YZ: parábolas

(0,0,0)$\rightarrow$ vértice

Se a = b temos um paraboloide de revolução.

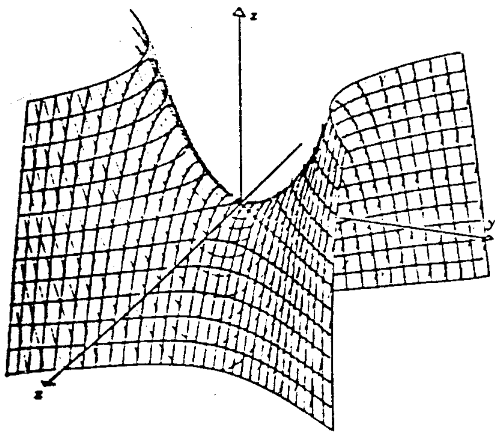
Paraboloide hiperbólico

$$\boxed{\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}}$$

- secções paralelas ao plano XY: z = 0 duas linhas concorrentes na origem
  caso contrário hipérboles
- secções paralelas ao plano XZ: parábolas
- secções paralelas ao plano YZ: parábolas

(0,0,0)$\rightarrow$ ponto de sela ou de minimax da superfície

As hipérboles acima de XY abrem na direcção de y e abaixo de XY abrem na direcção de x.



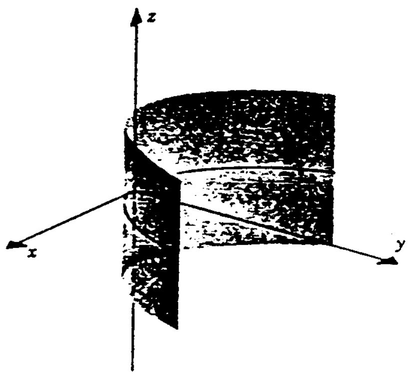
Cilindros

Pegue-se numa curva plana C. Todas as linhas que passam por C e são perpendiculares ao plano de C formam uma superfície (cilindro). As linhas perpendiculares são chamadas geratrizes do cilindro.

Se a linha curva se encontra no plano XY (ou num plano paralelo ao plano XY) então as geratrizes do cilindro são paralelas ao eixo dos zz e a equação do cilindro só envolve x e y.

Cilindro parabólico

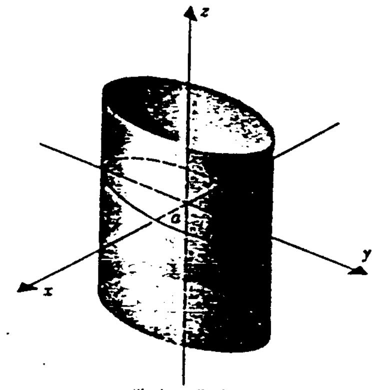
$$\boxed{x^2 = 4cy}$$



parabolic cylinder

Cilindro elíptico

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

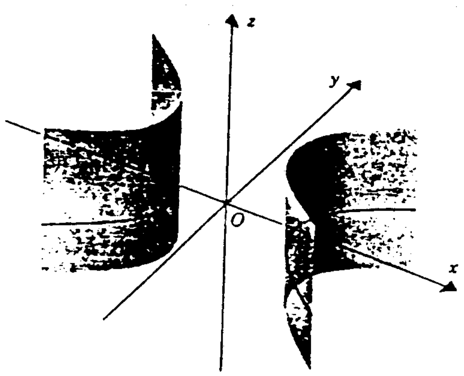


elliptic cylinder

Se a = b obtemos um cilindro de revolução.

Cilindro hiperbólico

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$



hyperbolic cylinder