Funções Vectoriais de Várias Variáveis

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \hookrightarrow f(x) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_p(x_1, \ldots, x_n))$$

Definição (Limite segundo Cauchy)

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *e* $a \in \overline{D}$. *Diz-se que* f *tende para* b *quando* x *tende para* a *ou que* f *tem limite* b *em* a *e escreve-se* $\lim_{x \to a} f(x) = b$ *se:*

$$\forall \delta > 0, \exists \epsilon > 0, x \in D \cap V_\epsilon(a) \Rightarrow f(x) \in V_\delta(b)$$

$$\forall \delta > 0, \exists \epsilon > 0, x \in D \wedge \|x - a\| < \epsilon \Rightarrow \|f(x) - b\| < \delta$$

Teorema

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *e* $a \in \overline{D}$. *O limite de* f *quando* x *tende para* a *é* $b = (b_1, \ldots, b_p)$ *se e só se:*

$$lim_{x \to a} f_i(x) = b_i, \forall i \in \{1, \ldots, p\}$$

Exemplo

Teorema (Limite segundo Heine)

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *e* $a \in \overline{D}$. *Temos* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ *se e só se para qualquer sucessão* (x_m) *de elementos de* D *a convergir para* a, *a sucessão* $(f(x_m))$ *converge para* b.

Definição

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *e suponhamos que* D *é tal que faz sentido considerar* $\|x\|$ *tão grande quanto se queira. Diz-se que* $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) = b$ *se:*

$$\forall \delta > 0, \exists \epsilon > 0, x \in D \wedge \|x\| > \epsilon \Rightarrow \|f(x) - b\| < \delta$$

Definição

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *e* $a \in \overline{D}$. *Diz-se que* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ *se:*

$$\forall \delta > 0, \exists \epsilon > 0, x \in D \wedge \|x - a\| < \epsilon \Rightarrow \|f(x)\| > \delta$$

Função Contínua

Definição

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ e $a \in$. *Diz-se que* f *é continua em* a *se existir* $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Notas:

- Como consequência $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- Se f não é contínua em $a \in D$ então f diz-se descontínua em a.

Definição

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ e $A \subseteq D$. *Diz-se que* f *é contínua em* A *se* f *é contínua em todos os pontos de* A.

Propriedades das Função Contínuas

Teorema

Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *funções contínuas em* $a \in D_f \bigcap D_g$. *Então* $f + g, f - g$ e $f.g$ *também são contínuas em* a e *se* $g(a) \neq 0$ *então* $\frac{f}{g}$ *também é contínua em* a.

Teorema

Sejam $g : D_g \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ e $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ *contínuas em* $a \in D_g$ e *em* $g(a) \in D_f$, *respectivamente. Então* $f \circ g$ *é contínua em* a.

Exemplos: Projecções, constantes, polinómios,...

Prolongamento por continuidade

Definição

Sejam $f, \bar{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *duas funções. Diz-se que* $\bar{f}$ *é um prolongamento de* f *se:*

- $D_f \subset D_{\bar{f}}$
- $\forall x \in D_f, \bar{f}(x) = f(x)$

Teorema

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ e $a \in \mathbb{R}^n \setminus D$. *A função* f *é prolongável por continuidade ao ponto* a *se e só se existir* $\lim_{x \to a} f(x)$.

Exemplo

Descontinuidade removível

Definição

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *uma função descontínua em* $a \in D$. *Diz-se que* f *tem uma descontinuidade removível no ponto* a *se existir uma função* g, *contínua em* a, *que apenas difere de* f *em* a.