Integrais Duplos sobre Domínios Rectangulares

Pretendemos calcular $\displaystyle\int\int_R f(x,y)dx\,dy$, com $R = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d\}$ e f limitada em R.

Definição

Dados $n+1$ pontos $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ e $m+1$ pontos $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_{m-1} < y_m = d$, o conjunto dos subrectângulos da forma

$$R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}],$$

com $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $j \in \{0, \ldots, m-1\}$ diz-se uma partição (P) de R.

Nota: $R = \bigcup_{i=0}^{n-1} \bigcup_{j=0}^{m-1} Rij$ e $int(R_{ij}) \bigcap int(R_{kl}) = \emptyset$

Integrais Duplos sobre Domínios Rectangulares

$\Delta R_{ij} = (x_{i+1} - x_i) \times (y_{j+1} - y_j) \rightarrow$ área de R_{ij}

$s_f(P) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \Delta R_{ij}\, inf_{(x,y)\in R_{ij}} f(x,y) \rightarrow$ soma de Darboux inferior de f relativamente a P

$S_f(P) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \Delta R_{ij}\, sup_{(x,y)\in R_{ij}} f(x,y) \rightarrow$ soma de Darboux superior de f relativamente a P

Integrais Duplos sobre Domínios Rectangulares

Definição

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *uma função limitada e* R *um rectângulo contido em* D. *Diz-se que* f *é integrável em* R *se*

$$sup_{P \in \mathcal{P}}\ s_f(P) = inf_{P \in \mathcal{P}}\ S_f(P),$$

com $\mathcal{P}$ *o conjunto de todas as partições de* R. *Este valor designa-se por*

$$\int\int_R f(x,y)dx\,dy.$$

Nota: Se f é limitada e não negativa, o integral duplo corresponde ao volume compreendido entre o gráfico de f e o plano XOY, no rectângulo R.

Exemplo

Integrais Duplos sobre Domínios Rectangulares

Teorema

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *uma função contínua num conjunto contendo o rectângulo* R. *Então* f *é integrável em* R.

Nota: A propriedade mantém-se se apenas falhar a continuidade num conjunto de medida nula.

Integrais Iterados

Seja $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ uma função contínua.

Para todo o $x \in [a,b]$ podemos definir a função

$$f_x : [c,d] \to \mathbb{R}$$
$$f_x(y) = f(x,y)$$

f_x é contínua logo é integrável.

Analogamente, para todo o $y \in [c,d]$ podemos definir a função

$$f_y : [a,b] \to \mathbb{R}$$
$$f_y(x) = f(x,y)$$

f_y é contínua logo é integrável.

Exemplo

Integrais Iterados

Proposição

Seja $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Então* $I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ e $J(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$ *são funções contínuas em* $[c,d]$ e $[a,b]$, *respectivamente.*

Definição

Seja $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Chama-se integrais iterados a:*

$$\int_c^d I(y)\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dxdy$$

e a

$$\int_a^b J(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dydx$$

Método da Secção (Cavalieri, séc. XVI)

Seja S um sólido de $\mathbb{R}^3$ e consideremos a família de planos $\{P_z\}_{a\leq z\leq b}$ paralelos a XOY tais que:

- S está compreendido entre P_a e P_b
- A área da intersecção $S\bigcap P_z$ é dada por $A(z)$

Se $A(z)$ é integrável em $[a, b]$ então o volume de S é dado por

$$Vol(S) = \int_a^b A(z)\, dz$$

Exemplos

Teorema de Fubini

Teorema

Seja $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Então:*

$$\int \int_R f(x, y) dx\, dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dydx$$