Integrais Duplos Sobre Domínios Gerais

Seja C um conjunto limitado no plano, com fronteira suficientemente regular (constituída por curvas que representam gráficos de funções reais de variável real contínuas). Prolonguemos f a um rectângulo R que contenha C:

$$\bar{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{, se } (x,y) \in C \\ 0 & \text{, se } (x,y) \in R \setminus C \end{cases}$$

Definição

Se $\bar{f}$ é integrável em R então f é integrável em C e

$$\int\int_C f(x,y)dx\,dy = \int\int_R \bar{f}(x,y)dx\,dy$$

Conjuntos verticalmente simples

Sejam g_1 e g_2 funções contínuas em $[a, b]$. Chama-se conjunto verticalmente simples ao conjunto definido como:

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

Proposição

Seja f contínua numa região V, verticalmente simples. Então:

$$\int \int_V f(x, y) dx\, dy = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy\, dx$$

Demonstração

Conjuntos horizontalmente simples

Sejam h_1 e h_2 funções contínuas em $[c, d]$. Chama-se conjunto horizontalmente simples ao conjunto definido como:

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d \wedge h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

Proposição

Seja f contínua numa região H, horizontalmente simples. Então:

$$\int\int_H f(x, y) dx\, dy = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx\, dy$$

Exemplos