Propriedades de Cálculo de Integrais Duplos

Sejam f, g funções definidas de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$

- Seja $A = A_1 \cup A_2$ com $int(A_1) \cap int(A_2) = \emptyset$. Se f é integrável em A_1 e em A_2 então f é integrável em A e

$$\int\int_A f(x,y)dx\,dy = \int\int_{A_1} f(x,y)dx\,dy + \int\int_{A_2} f(x,y)dx\,dy$$

- Se f e g são integráveis em A e $c \in \mathbb{R}$ então

$$\int\int_A (f + c\,g)(x,y)dx\,dy = \int\int_A f(x,y)dx\,dy + c\int\int_A g(x,y)dx\,dy$$

Propriedades de Cálculo de Integrais Duplos

- Se $f(x,y) \geq g(x,y), \forall (x,y) \in A$ e f e g são integráveis em A então:

$$\int\int_A f(x,y)dx\,dy \geq \int\int_A g(x,y)dx\,dy$$

- Se f é integrável em A então $|f|$ é integrável em A e:

$$\left|\int\int_A f(x,y)dx\,dy\right| \leq \int\int_A |f(x,y)|dx\,dy$$

Aplicações dos Integrais Duplos

- Volume compreendido entre duas superfícies definidas por $z = f(x, y)$ e $z = g(x, y)$, com $f(x, y) \geq g(x, y), \forall (x, y) \in D$

$$V = \int\int_D f(x, y) - g(x, y) dxdy$$

- Área de um domínio plano D

$$A = \int\int_D 1 dxdy$$

- Massa de uma lâmina fina (de espessura desprezável)

$$M = \int\int_D d(x, y) dxdy,$$

com $d(x, y)$ densidade da lâmina no ponto (x, y)

- Centro de massa de uma lâmina fina (de espessura desprezável)

$$M_x = \int\int_D x\, d(x,y)dxdy$$

$$M_y = \int\int_D y\, d(x,y)dxdy$$

$$CM = \left(\frac{M_x}{M}, \frac{M_y}{M}\right)$$

- Momentos de inércia de uma lâmina fina (de espessura desprezável)

$$I_x = \int\int_D y^2 d(x,y)dxdy$$

$$I_y = \int\int_D x^2 d(x,y)dxdy$$

Mudança de Variável em Integrais Duplos

Teorema

Sejam $f : S \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $T : R \to S$ uma função vectorial tal que $T(R) = S$ e:

- T *é de classe* $\mathcal{C}^1$
- T *é injectiva no interior de* R
- *o jacobiano de* T *não se anula no interior de* R

Então:

$$\int\int_S f(x,y)dxdy = \int\int_R f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv$$