Integrais Triplos em Domínios Paralelepipédicos

Pretendemos calcular $\int\int\int_P f(x,y,z)dx\,dy\,dz$, com $P = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2] = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a_1 \leq x \leq a_2 \wedge b_1 \leq y \leq b_2 \wedge c_1 \leq z \leq c_2\}$ e f limitada em P.

Definição

Dados $n+1$ pontos $a_1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = a_2$, $m+1$ pontos $b_1 = y_0 < y_1 < \ldots < y_{m-1} < y_m = b_2$ e $l+1$ pontos $c_1 = z_0 < z_1 < \ldots < z_{l-1} < z_l = c_2$, o conjunto dos paralelepípedos da forma

$$P_{ijk} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}],$$

com $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $j \in \{0, \ldots, m-1\}$ e $k \in \{0, \ldots, l-1\}$ diz-se uma partição (π) de P.

Nota: $P = \bigcup_{i=0}^{n-1} \bigcup_{j=0}^{m-1} \bigcup_{k=0}^{l-1} P_{ijk}$ e $int(P_{ijk}) \bigcap int(P_{i'j'k'}) = \emptyset$

Integrais Triplos em Domínios Paralelepipédicos

$Vol(P_{ijk}) = (x_{i+1} - x_i) \times (y_{j+1} - y_j) \times (z_{k+1} - z_k) \rightarrow$ volume de P_{ijk}

$s_f(\pi) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{l-1} Vol(P_{ijk})\, inf_{(x,y,z)\in P_{ijk}} f(x,y,z) \rightarrow$ soma de Darboux inferior de f relativamente a π

$S_f(\pi) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{l-1} Vol(P_{ijk})\, sup_{(x,y,z)\in P_{ijk}} f(x,y,z) \rightarrow$ soma de Darboux superior de f relativamente a π

Integrais Triplos em Domínios Paralelepipédicos

Definição

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *uma função limitada e* P *um paralelepípedo contido em* D. *Diz-se que* f *é integrável em* P *se*

$$sup_{\pi \in \mathcal{P}}\ s_f(\pi) = inf_{\pi \in \mathcal{P}}\ S_f(\pi),$$

com $\mathcal{P}$ *o conjunto de todas as partições de* P. *Este valor designa-se por*

$$\int\int\int_P f(x,y,z)dx\,dy\,dz.$$

Teorema

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *uma função contínua num conjunto contendo o paralelepípedo* P. *Então* f *é integrável em* P.

Nota: A propriedade mantém-se se apenas falhar a continuidade num conjunto de medida nula.

Teorema de Fubini

Teorema

Seja $f : P = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Então:*

$$\int\int\int_P f(x,y,z)dx\,dy = \int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2}\int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)\,dzdydx = \dots$$

$$= \int_{c_1}^{c_2}\int_{b_1}^{b_2}\int_{a_1}^{a_2} f(x,y,z)\,dxdydz$$

(seis formas distintas de ordenação)

Exemplo

Integrais Triplos em Domínios Gerais

Seja $S \subseteq \mathbb{R}^3$ um conjunto limitado, com fronteira suficientemente regular (constituída por superfícies que representam gráficos de funções reais de variável real contínuas). Prolonguemos f a um paralelepípedo P que contenha S:

$$\bar{f}(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & \text{, se } (x,y,z) \in S \\ \\ 0 & \text{, se } (x,y,z) \in P \setminus S \end{cases}$$

Definição

Se $\bar{f}$ é integrável em P então f é integrável em S e

$$\int\int\int_S f(x,y,z)dx\,dy\,dz = \int\int\int_P \bar{f}(x,y,z)dx\,dy\,dz$$

Conjuntos Básicos em $\mathbb{R}^3$

Sejam g_1 e g_2 funções contínuas em $C \subseteq \mathbb{R}^2$. Um conjunto básico de $\mathbb{R}^3$ é:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in C \wedge g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$$

Proposição

Se f é contínua em S, então:

$$\int\int\int_S f(x, y, z)dx\, dy\, dz = \int\int_C \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)dz \right) dx\, dy$$

Nota: Poderíamos estabelecer resultados semelhantes para os dois outros tipos de conjuntos básicos de $\mathbb{R}^3$.

- Volume do sólido S, limitado pelas superfícies $z = f(x, y)$ e $z = g(x, y)$, com $f(x, y) \geq g(x, y), \forall (x, y) \in D$

$$V = \int\int\int_S 1 dxdydz = \int\int_D \int_{g(x,y)}^{f(x,y)} 1 dzdxdy =$$

$$= \int\int_D f(x, y) - g(x, y) dxdy$$

- Massa de um sólido S

$$M = \int\int\int_S d(x, y, z) dxdydz,$$

com $d(x, y, z)$ densidade do sólido no ponto (x, y, z)

Aplicações dos Integrais Triplos

- Centro de massa de um sólido S

$$M_x = \int\int\int_S x\, d(x,y,z)dxdydz$$

$$M_y = \int\int\int_S y\, d(x,y,z)dxdydz$$

$$M_z = \int\int\int_S z\, d(x,y,z)dxdydz$$

$$CM = \left(\frac{M_x}{M}, \frac{M_y}{M}, \frac{M_z}{M}\right)$$

- Momento de inércia de um sólido S em relação a um eixo

$$I_z = \int\int\int_S (x^2 + y^2) d(x, y, z) dxdydz$$

$$I_y = \int\int\int_S (x^2 + z^2) d(x, y, z) dxdydz$$

$$I_x = \int\int\int_S (y^2 + z^2) d(x, y, z) dxdydz$$

Mudança de Variável em Integrais Triplos

Teorema

Sejam $f : S \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *uma função contínua e* $T : R \subseteq \mathbb{R}^3 \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ *uma função vectorial tal que* $T(R) = S$ *e:*

- T *é de classe* $\mathcal{C}^1$
- T *é injectiva no interior de* R
- *o jacobiano de* T *não se anula no interior de* R

Então:

$$\int\int\int_S f(x,y,z)dxdydz =$$

$$\int\int\int_R f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| dudvdw$$