FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Análise Matemática II *E*

Departamento de Matemática FCT-UNL
Exame – 14 de janeiro de 2014
Duração: 3h00m

Nome:____ **Número:**__________

Nº Caderno:__________ **Total de folhas entregues:** ___

1ª Parte

[1.0] 1. Determine a solução particular da equação diferencial de primeira ordem $(1+x^2)\frac{dy}{dx}+2xy+x^3+x=0$ que satisfaz a condição inicial $y(0)=1$.

[1.0] 2. Calcule a solução geral da equação $(1+e^x)yy'=e^x$.

[1.0] 3. Faça corresponder a cada uma das funções vectoriais ou equações paramétricas, uma das opções (I) a (V), correspondente à sua representação gráfica ou a uma porção desta.

(I) Recta (II) Elipse (III) Parábola (IV) Hipérbole (V) Hélice

____ $x=e^t$, $y=e^{-t}$, com $t\in\mathbb{R}$;

____ $\vec{\sigma}(t)=(3\cos(t),1,2\sin(t))$, com $t\in[0,2\pi]$;

____ $\vec{\sigma}(t)=(t-2)\mathbf{i}+\mathbf{j}+(t^2+1)\mathbf{k}$, com $t\in\mathbb{R}$;

____ $x=\log t$, $y=-\log t$, com $t\in\mathbb{R}$;

____ $\vec{\sigma}(t)=(\frac{t-1}{2})\mathbf{i}+(1-t)\mathbf{j}+3t\mathbf{k}$, com $t\in\mathbb{R}$;

____ $x=2t$, $y=\sin(3t)$, $z=\cos(3t)$, com $t\in\mathbb{R}$;

[1.0] 4. Indique uma representação paramétrica da curva resultante da interseção entre o cilindro $x^2+y^2=4$ e o plano $z=2x$.

[1.0] 5. Determine uma equação da recta tangente à curva de equações $x=t^2$, $y=\arctan t$, $z=\log t$, com $t\in\mathbb{R}^+$, no ponto $\left(1,\frac{\pi}{4},0\right)$.

[1.0] 6. Considere a função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \dfrac{xy^2 \log(2+x^2+y^2)}{x^2+y^2}$. Indique a derivada parcial de primeira ordem de f em ordem a x, em cada ponto do seu domínio.

[1.0] 7. Considere as funções f e g diferenciáveis e os valores na seguinte tabela:

Calcule:

	f	g	f_x	f_y
$(0,1)$	5	2	3	7
$(1,1)$	2	5	6	1

(a) $g_t(0,1)$ sabendo que $g(s,t) = f(s+t^2, te^s)$;

(b) $g_u(1,1)$ sabendo que $g(u,v) = f(\log(uv), \frac{1}{4}(u+v)^2)$.

[1.0] 8. Determine uma equação do plano tangente à superfície de equação $xz - yz^3 + yz^2 = 2$ no ponto $P(2,-1,1)$.

[1.0] 9. Considere o seguinte integral $\displaystyle\int_0^1 \int_1^{e^x} f(x,y)\, dydx$. Elabore um esboço da região de integração e inverta a ordem de integração.

[1.0] 10. Escreva um integral iterado que permita calcular a área da região do plano xOy limitada pelas curvas $x = y^2$ e $x = 2y$. (Não precisa de determinar o valor do integral.)

Nome:____ **Número:**____________

A resposta às perguntas com a indicação **PB (cotação)** é facultativa. O total da cotação obtida com as respostas às perguntas 1 a 14 - incluindo as perguntas PB - não ultrapassará os 10 valores.)

11. **PB (+0.5):** Considere a função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \arctan\left(\sqrt{\log(2 - x^2 - y^2)}\right)$. Indique o conjunto de pontos onde a função é contínua. Elabore um esboço do mesmo.

12. **PB (+0.5):** Suponha que um objecto se encontra na posição $(1, 1, 0)$ e pretende deslocar-se sobre a superfície correspondente ao gráfico da função $f(x, y) = 5 - 4x^2 - y^2$.

    (a) Indique o declive que o objecto encontrará se se mover na direção paralela ao eixo dos x's e segundo o sentido positivo deste.

    (b) Qual a direcção que o objecto deve seguir se pretender subir mais rapidamente?

    (c) Indique o declive que o objecto encontrará se se mover em direcção ao ponto $(x, y) = (0, 2)$.

13. **PB (+0.5):** Determine o declive da recta tangente à curva $\frac{x}{y} = \sin\left(\frac{\pi}{2}xy\right)$ no ponto $(1, 1)$.

14. **PB (+0.5):** Determine o vector posição de uma partícula cujo vector velocidade é dado em função do tempo t por $\vec{v}(t) = e^t\mathbf{i} + te^{t^2}\mathbf{j} + \frac{2t}{e+t^2}\mathbf{k}$ que no instante $t = 0$ se encontra em $2\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

2ª Parte

Atenção: As respostas às perguntas seguintes devem ser cuidadosamente justificadas em folha(s) do caderno de prova, devidamente **identificada(s)**, com o nome e o número de aluno.

[2.0] 15. Considere o problema de valor inicial sobre o intervalo $x = 0$ a $x = 0.6$:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x - y + 2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Resolva-o utilizando o Método de Euler com passo de 0.2.

Mude de Folha

[2.5] 16. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2 \log(2 + x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(a) Estude a continuidade de f na origem.

(b) Calcule as derivadas parciais de primeira ordem de f em $(0,0)$.

(c) Calcule $D_{\vec{u}} f(0,0)$, sendo $\vec{\mathbf{u}}$ o vector unitário $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

(d) Estude f quanto à diferenciabilidade no ponto $(0,0)$.

Mude de Folha

[2.5] 17. (a) Determine os extremos relativos da função $f(x,y) = xy - y^2 - x^3$.

(b) Indique os extremos absolutos de $g(x,y,z) = x + y + z$ no conjunto $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 1\}$.

Mude de Folha

[3.0] 18. (a) Descreva em coordenadas polares o conjunto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x^2 + (y-2)^2 \leq 4\}$.

(b) Efectuando uma mudança de variáveis para coordenadas cilíndricas calcule $\displaystyle\iiint_E \frac{1}{y}\, dV$, onde E é a região limitada pelo plano $z = 0$, pelo cilindro $x^2 + (y-2)^2 = 4$ e pela porção de superfície cónica $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(c) Efectue uma mudança de variáveis de acordo com a transformação $(x,y) = T(u,v)$, com $T(u,v) = \left(\frac{1}{2}(u^2 - v^2), uv\right)$, para determinar a área da região $\mathcal{R} = T([1,2] \times [1,2])$ limitada pelas curvas $2x = 1 - y^2$, $2x = y^2 - 1$, $8x = 16 - y^2$ e $8x = y^2 - 16$.

Fim