FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Análise Matemática II *E*

Departamento de Matemática FCT-UNL
Exame – 14 de janeiro de 2014
Duração: 3h00m

Nome:______________________________ **Número:**__________

Nº Caderno:__________ **Total de folhas entregues:** ___

1ª Parte

[1.0] 1. Determine a solução particular da equação diferencial de primeira ordem $(1+x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy + x^3 + x = 0$ que satisfaz a condição inicial $y(0) = 1$.

A equação dada é equivalente à equação $\frac{d}{dx}\left((1+x^2)y\right) = -x^3 - x \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left((1+x^2)y\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)$. Logo,
$(1+x^2)y = -\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + c \Leftrightarrow y(x) = \dfrac{-\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + c}{1+x^2}$ (para certo $c \in \mathbb{R}$).
Como $y(0) = 1$, então $c = 1$. Portanto $y(x) = \dfrac{-\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 1}{1+x^2}$

[1.0] 2. Calcule a solução geral da equação $(1+e^x)yy' = e^x$.

Temos $yy' = \frac{e^x}{1+e^x}$ donde $\frac{d}{dx}\left(\int y\,dy\right) = \frac{d}{dx}\left(\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx\right)$ e portanto
$\frac{y^2}{2} = \log(1+e^x) + C$ é a solução geral, dada de modo implícito, da equação diferencial

[1.0] 3. Faça corresponder a cada uma das funções vectoriais ou equações paramétricas, uma das opções (I) a (V), correspondente à sua representação gráfica ou a uma porção desta.

(I) Recta (II) Elipse (III) Parábola (IV) Hipérbole (V) Hélice

IV $x = e^t$, $y = e^{-t}$, com $t \in \mathbb{R}$;

III $\vec{\sigma}(t) = (t-2)\mathbf{i} + \mathbf{j} + (t^2+1)\mathbf{k}$, com $t \in \mathbb{R}$;

I $\vec{\sigma}(t) = (\frac{t-1}{2})\mathbf{i} + (1-t)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$, com $t \in \mathbb{R}$;

II $\vec{\sigma}(t) = (3\cos(t), 1, 2\sin(t))$, com $t \in [0, 2\pi]$;

I $x = \log t$, $y = -\log t$, com $t \in \mathbb{R}$;

V $x = 2t$, $y = \sin(3t)$, $z = \cos(3t)$, com $t \in \mathbb{R}$;

[1.0] 4. Indique uma representação paramétrica da curva resultante da interseção entre o cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e o plano $z = 2x$.

$x = 2\cos t$, $y = 2\,\text{sen}\,t$, $z = 4\cos t$, $t \in \mathbb{R}$

[1.0] 5. Determine uma equação da recta tangente à curva de equações $x = t^2$, $y = \arctan t$, $z = \log t$, com $t \in \mathbb{R}^+$, no ponto $(1, \frac{\pi}{4}, 0)$.

Sendo $\vec{\sigma}(t) = t^2\vec{i} + \text{arctg}\, t\,\vec{j} + \log t\,\vec{k}$, $t \in \mathbb{R}^+$, temos
$\vec{\sigma}(t) = (1, \frac{\pi}{4}, 0)$ se, e só se, $t = 1$. Ora $\sigma'(t) = 2t\vec{i} + \frac{1}{1+t^2}\vec{j} + \frac{1}{t}\vec{k}$, $t \in \mathbb{R}$
e $\vec{\sigma}'(1) = (2, \frac{1}{2}, 1)$.
A equação pedida é $(x,y,z) = (1, \frac{\pi}{4}, 0) + \lambda(2, \frac{1}{2}, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

[1.0] 6. Considere a função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \dfrac{xy^2 \log(2+x^2+y^2)}{x^2+y^2}$. Indique a derivada parcial de primeira ordem de f em ordem a x, em cada ponto do seu domínio.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\left(y^2 \log(2+x^2+y^2) + xy^2 \frac{2x}{2+x^2+y^2}\right)\cdot(x^2+y^2) - 2x \cdot xy^2 \log(2+x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

[1.0] 7. Considere as funções f e g diferenciáveis e os valores na seguinte tabela:

Calcule:

	f	g	f_x	f_y
$(0,1)$	5	2	3	7
$(1,1)$	2	5	6	1

(a) $g_t(0,1)$ sabendo que $g(s,t) = f(s+t^2, te^s)$;

$$g_t(0,1) = f_x(1,1)\Big[2t\Big]_{(s,t)=(0,1)} + f_y(1,1)\Big[e^s\Big]_{(s,t)=(0,1)} = 6 \times 2 + 1 \times 1 = 13$$

(b) $g_u(1,1)$ sabendo que $g(u,v) = f(\log(uv), \frac{1}{4}(u+v)^2)$.

$$g_u(1,1) = f_x(0,1)\Big[\frac{1}{u}\Big]_{(u,v)=(1,1)} + f_y(0,1)\Big[\frac{1}{2}(u+v)\Big]_{(u,v)=(1,1)} = 3 \times 1 + 7 \cdot 1 = 10.$$

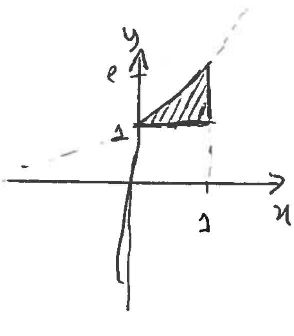
[1.0] 8. Determine uma equação do plano tangente à superfície de equação $xz - yz^3 + yz^2 = 2$ no ponto $P(2,-1,1)$.

Sendo $g(x,y,z) = xz - yz^3 + yz^2$ temos $\nabla g(x,y,z) = (z, -z^3+z^2, x - 3yz^2 + 2yz)$ e $\nabla g(2,-1,1) = (1,0,3)$. Uma equação do plano tangente é

$$(x-2) + 3(z-1) = 0$$

[1.0] 9. Considere o seguinte integral $\displaystyle\int_0^1 \int_1^{e^x} f(x,y)\,dy\,dx$. Elabore um esboço da região de integração e inverta a ordem de integração.

$$\int_1^e \int_{\log y}^1 f(x,y)\,dx\,dy$$



[1.0] 10. Escreva um integral iterado que permita calcular a área da região do plano xOy limitada pelas curvas $x = y^2$ e $x = 2y$. (Não precisa de determinar o valor do integral.)

Temos $x = y^2 \wedge x = 2y \iff \big((x,y) = (0,0) \vee (x,y) = (4,2)\big)$

A área é dada por $\displaystyle\int_0^4 \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} 1\,dy\,dx$ ou $\displaystyle\int_0^2 \int_{y^2}^{2y} 1\,dx\,dy$.

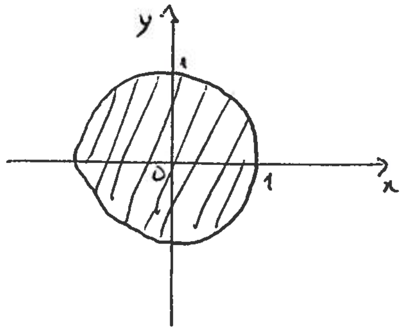
Nome:____ **Número:**__________

A resposta às perguntas com a indicação **PB (cotação)** é facultativa. O total da cotação obtida com as respostas às perguntas 1 a 14 - incluindo as perguntas PB - não ultrapassará os 10 valores.)

11. **PB (+0.5):** Considere a função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \arctan\left(\sqrt{\log(2-x^2-y^2)}\right)$. Indique o conjunto de pontos onde a função é contínua. Elabore um esboço do mesmo.

A função f é contínua em

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$



12. **PB (+0.5):** Suponha que um objecto se encontra na posição $(1,1,0)$ e pretende deslocar-se sobre a superfície correspondente ao gráfico da função $f(x,y) = 5 - 4x^2 - y^2$.

(a) Indique o declive que o objecto encontrará se se mover na direção paralela ao eixo dos x's e segundo o sentido positivo deste.

O declive é $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \left[-8x\right]_{(x,y)=(1,1)} = -8$

(b) Qual a direcção que o objecto deve seguir se pretender subir mais rapidamente?

Deve seguir a direcção do vector $\nabla f(1,1) = (-8,-2)$

(c) Indique o declive que o objecto encontrará se se mover em direcção ao ponto $(x,y) = (0,2)$.

O declive é dado por $D_{\vec{u}} f(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot \vec{u} = (-8,-2)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{6}{\sqrt{2}}$ sendo $\vec{u}$ o vector unitário com direcção e sentido de $(0,2)-(1,1) = (-1,1)$.

13. **PB (+0.5):** Determine o declive da recta tangente à curva $\frac{x}{y} = \sin\left(\frac{\pi}{2}xy\right)$ no ponto $(1,1)$.

Seja $g(x,y) = \frac{x}{y} - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}xy\right)$. Temos $\nabla g(x,y) = \left(\frac{1}{y} - \frac{\pi}{2}y\cos\left(\frac{\pi}{2}xy\right), \ldots\right.$
$\left.\ldots -\frac{x}{y^2} - \frac{\pi}{2}x\cos\left(\frac{\pi}{2}xy\right)\right)$ e $\nabla g(1,1) = (1,-1)$.

Portanto, o declive é $\frac{dy}{dx}(1) = -\frac{1}{-1} = 1$.

14. **PB (+0.5):** Determine o vector posição de uma partícula cujo vector velocidade é dado em função do tempo t por $\vec{v}(t) = e^t\mathbf{i} + te^{t^2}\mathbf{j} + \frac{2t}{e+t^2}\mathbf{k}$ que no instante $t = 0$ se encontra em $2\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

Tem-se $\vec{v}(t) = \vec{\sigma}'(t)$ com $\sigma(t) = e^t\vec{i} + \frac{1}{2}e^{t^2} + \log(e+t^2)\vec{k} + \vec{c}$, com $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ e $t \in \mathbb{R}$. Como $\vec{\sigma}(0) = 2\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + 2k$, conclui-se que $\vec{c} = \vec{i} + \vec{k}$.

Portanto, $\vec{\sigma}(t) = (e^t+1)\vec{i} + \frac{1}{2}e^{t^2}\vec{j} + (1+\log(e+t^2))\vec{k}$, $t \in \mathbb{R}$

2ª Parte

Atenção: As respostas às perguntas seguintes devem ser cuidadosamente justificadas em folha(s) do caderno de prova, devidamente **identificada(s)**, com o nome e o número de aluno.

[2.0] 15. Considere o problema de valor inicial sobre o intervalo $x = 0$ a $x = 0.6$:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x - y + 2 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Resolva-o utilizando o Método de Euler com passo de 0.2.

Mude de Folha

[2.5] 16. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2 \log(2 + x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(a) Estude a continuidade de f na origem.

(b) Calcule as derivadas parciais de primeira ordem de f em $(0,0)$.

(c) Calcule $D_{\vec{u}} f(0,0)$, sendo $\vec{u}$ o vector unitário $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

(d) Estude f quanto à diferenciabilidade no ponto $(0,0)$.

Mude de Folha

[2.5] 17. (a) Determine os extremos relativos da função $f(x,y) = xy - y^2 - x^3$.

(b) Indique os extremos absolutos de $g(x,y,z) = x + y + z$ no conjunto $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 1\}$.

Mude de Folha

[3.0] 18. (a) Descreva em coordenadas polares o conjunto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x^2 + (y-2)^2 \leq 4\}$.

(b) Efectuando uma mudança de variáveis para coordenadas cilíndricas calcule $\iiint_E \frac{1}{y}\, dV$, onde E é a região limitada pelo plano $z = 0$, pelo cilindro $x^2 + (y-2)^2 = 4$ e pela porção de superfície cónica $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(c) Efectue uma mudança de variáveis de acordo com a transformação $(x,y) = T(u,v)$, com $T(u,v) = \left(\frac{1}{2}(u^2 - v^2), uv\right)$, para determinar a área da região $\mathcal{R} = T([1,2] \times [1,2])$ limitada pelas curvas $2x = 1 - y^2$, $2x = y^2 - 1$, $8x = 16 - y^2$ e $8x = y^2 - 16$.

Fim

15.

O valor aproximado de $y(0{,}6)$ obtem-se, utilizando o método de Euler, considerando y_3 sendo que

$$y_0 = 2 \quad , \quad x_0 = 0 \quad , \quad y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)\, h$$

com $h = 0{,}2$ e $f(x,y) = x - y + 2$.

Ora

i	0	1	2	3
x_i	0	0,2	0.4	0.6
y_i	2	2	2,04	2,112

pois $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0) \times 0.2 = 2 + (0 - 2 + 2) \times 0.2 = 2$

$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1) \times 0.2 = 2 + (0.2 - 2 + 2) \times 0.2 = 2{,}04$

$y_3 = y_2 + f(x_2, y_2) \times 0.2 = 2.04 + (0{,}4 - 2{,}04 + 2) \times 0.2 = 2{,}112$

16.

(a) Temos $\left| \dfrac{xy^2 \log(2+x^2+y^2)}{x^2+y^2} \right| \leq \dfrac{|x|(x^2+y^2)\log(2+x^2+y^2)}{x^2+y^2} = |x| \log(2+x^2+y^2) \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$

Portanto, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, donde f é contínua em $(0,0)$.

(b) Ora $f(0,y) = f(x,0) = 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Logo, $f_x(0,0) = 0$ e $f_y(0,0) = 0$.

(c) Temos $D_{\vec{u}} f(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f\left((0,0) + h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}} h^3 \log(2+h^2)}{h^2}}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{2\sqrt{2}} \log(2+h^2) = \frac{\log 2}{2\sqrt{2}}$$

(d) Se f fosse diferenciável teríamos $D_{\vec{u}} f(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \vec{u} \underset{\text{alínea b)}}{=} (0,0) \cdot \vec{u} = 0$. Mas, pela alínea c), temos $D_{\vec{u}} f(0,0) \neq 0$. Logo f não é diferenciável em $(0,0)$.

17.
(a) Ora

$$\nabla f(x,y)=(0,0) \iff \begin{cases} y-3x^2=0 \\ x-2y=0 \end{cases} \iff \left((x,y)=(0,0) \vee (x,y)=\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)\right)$$

A hessiana de f é dada por $Hf(x,y)=\begin{vmatrix} -6x & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 12x-1$.

Como $Hf(0,0)=-1<0$, então f tem em $(0,0)$ um ponto de sela.

Como $Hf\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)=1>0$ e $f_{xx}\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)=-1<0$, então $f\left(\frac{1}{6},\frac{1}{12}\right)$ é máximo relativo de f.

(b) Como $\nabla g(x,y,z)\neq(0,0,0)$ concluímos que g não tem extremos no aberto $\mathrm{int}(D)$.

Procuremos os extremos de g no conjunto $\mathrm{fr}(D)$ pelo método de Lagrange. Sendo $h(x,y,z)=x^2+\frac{y^2}{9}+z^2$, sabemos que estes são solução do sistema

$$\begin{cases} \nabla g(x,y,z)=\lambda\nabla h(x,y,t) \\ h(x,y,z)=1 \end{cases} \iff \begin{cases} 1=\lambda 2x \\ 1=\lambda\frac{2}{9}y \\ 1=\lambda 2z \\ h(x,y,z)=1 \end{cases} \underset{\text{note } \lambda\neq 0}{\iff} \begin{cases} \frac{1}{\lambda}=2x=\frac{2}{9}y=2z \\ x^2+\frac{y^2}{9}+z^2=1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \text{—} \\ 11x^2=1 \end{cases} \iff \left((x,y,z)=\left(\frac{1}{\sqrt{11}},\frac{9}{\sqrt{11}},\frac{1}{\sqrt{11}}\right) \vee (x,y,z)=\left(-\frac{1}{\sqrt{11}},-\frac{9}{\sqrt{11}},-\frac{1}{\sqrt{11}}\right)\right)$$

Como D é limitado e fechado $g\left(\frac{1}{\sqrt{11}},\frac{9}{\sqrt{11}},\frac{1}{\sqrt{11}}\right)=\frac{11}{\sqrt{11}}$ é máximo e $g\left(-\frac{1}{\sqrt{11}},-\frac{9}{\sqrt{11}},-\frac{1}{\sqrt{11}}\right)=-\frac{11}{\sqrt{11}}$ é mínimo.

18 (a) Ora $x^2+(y-2)^2=4 \Leftrightarrow x^2+y^2=2y$ pelo que

$$D=\{(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta) \; : \; 0\leq r\leq 2\,\mathrm{sen}\,\theta, \; 0\leq\theta\leq\pi\}$$

(b) Temos $E=\{(x,y,z)=(r\cos\theta, r\sin\theta, z) : 0\leq r\leq 2\,\mathrm{sen}\,\theta, 0\leq\theta\leq\pi, 0\leq z\leq r\}$

donde $\iiint_E \frac{1}{y}\,dV = \int_0^{\pi}\int_0^{2\,\mathrm{sen}\,\theta}\int_0^{r} \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\cdot r\,dz\,dr\,d\theta =$

$$=\int_0^{\pi}\int_0^{2\,\mathrm{sen}\,\theta} \frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta}\Big[z\Big]_{z=0}^{r} dr\,d\theta = \int_0^{\pi}\frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{2\,\mathrm{sen}\,\theta} d\theta =$$

$$=\int_0^{\pi} 2\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta = \Big[-2\cos\theta\Big]_0^{\pi} = 4$$

(c) Ora sendo $(x,y)=T(u,v)$ temos $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} u & -v \\ v & u \end{vmatrix} = u^2+v^2$.

Logo, $A=\iint_R dx\,dy = \iint_{[1,2]\times[1,2]} u^2+v^2\,du\,dv = \int_1^2\int_1^2 u^2+v^2\,du\,dv$

$$=\int_1^2\left[\frac{u^3}{3}+uv^2\right]_{u=1}^{2} dv = \int_1^2 \frac{7}{3}+v^2\,dv = \left[\frac{7}{3}v+\frac{v^3}{3}\right]_1^2 = \frac{14}{3}$$