Análise Matemática II *E*
Departamento de Matemática FCT-UNL
Terceiro Teste - 18 de dezembro de 2013
Duração: 1h30m

Nome:______________________________ **Número:**__________

Nº Caderno:__________ **Total de folhas entregues:** ___

1ª Parte

[1.5] 1. Considere funções f e g diferenciáveis e os valores na seguinte tabela:

	f	g	f_x	f_y
$(0,1)$	2	5	3	7
$(-1,1)$	5	2	6	4

Calcule:

(a) $g_u(0,1)$ sabendo que $g(u,v) = f(-1+\cos(u+\frac{\pi}{2}v), ve^u)$;

$$g_u(0,1) = f_x(-1,1)\left[-\operatorname{sen}(u+\tfrac{\pi}{2}v)\right]_{(u,v)=(0,1)} + f_y(-1,1)\left[ve^u\right]_{(u,v)=(0,1)} = 6\times(-1)+4\times 1 = -2$$

(b) $g_s(-1,1)$ sabendo que $g(r,s) = f(r^2s+r, \log(-ers))$.

$$g_s(-1,1) = f_x(0,1)\left[r^2\right]_{(r,s)=(-1,1)} + f_y(0,1)\left[\frac{1}{s}\right]_{(r,s)=(0,1)} = 3\times 1 + 7\times 1 = 10$$

[1.5] 2. Suponha que um objecto se encontra na posição $(1,1,\frac{\pi}{4})$ e pretende deslocar-se sobre a superfície correspondente ao gráfico da função $f(x,y) = \arctan(xy)$.

(a) Indique o declive que o objecto encontrará se se mover na direção paralela ao eixo dos x's e segundo o sentido positivo deste.

O declive é dado por $f_x(1,1) = \left[\dfrac{y}{1+(xy)^2}\right]_{(x,y)=(1,1)} = \dfrac{1}{2}$

(b) Indique o declive que o objecto encontrará se se mover em direcção ao ponto $(x,y) = (0,2)$.

O declive é dado por $D_{\vec{u}}f(1,1) = \nabla f(1,1)\cdot\vec{u} = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})\cdot(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}) = 0$, sendo $\vec{u}$ o vector unitário com direcção e sentido de $(-1,1) = (0,2)-(1,1)$.

(c) Qual a direcção que o objecto deve seguir se pretender subir mais rapidamente?

O objecto deve seguir a direcção do vector $\nabla f(1,1) = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

[1.5] 3. Considere a função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2+xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ cujo gradiente no ponto $(0,0)$ é $(0,0)$. Determine a derivada direcional $D_{\vec{u}}f(0,0)$, sendo $\vec{u}$ o vector unitário $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Será f diferenciável em $(0,0)$? Justifique a resposta.

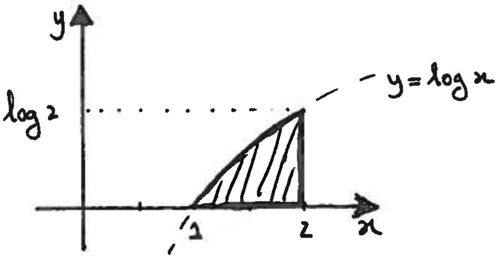
Ora $\displaystyle\lim_{h\to 0^\pm} \frac{f((0,0)+h(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0^\pm} \frac{\frac{\frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{2\sqrt{2}}h^3}{|h|}}{h} = \lim_{h\to 0^\pm} \frac{\frac{1}{2}h^2+\frac{1}{2\sqrt{2}}h^3}{h|h|} = \lim_{h\to 0^\pm}\left(\frac{1}{2}\frac{h}{|h|} + \frac{1}{2\sqrt{2}}|h|\right) = \pm\frac{1}{2}$. Logo, $D_{\vec{u}}f(0,0)$ não existe. Portanto, a função f não é diferenciável, pois se o fosse teríamos de ter $D_{\vec{u}}f(0,0) = \nabla f(0,0)\cdot\vec{u} = (0,0)\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}) = 0$.

[1.5] 4. Determine uma equação do plano tangente ao gráfico da função $f(x,y) = xy^3 - 2yx + 2$ no ponto $P(2,1,0)$.

Uma equação do plano tangente é dada por $z - z_0 = f_x(2,1)(x - x_0) + f_y(2,1)(y - y_0)$ com $(x_0, y_0, z_0) = (2,1,0)$, ou seja, $z - 0 = -1(x-2) + 2(y-1)$.

[2.0] 5. Considere o seguinte integral $\int_1^2 \int_0^{\log x} f(x,y)\,dydx$. Elabore um esboço da região de integração e inverta a ordem de integração.

A região de integração é

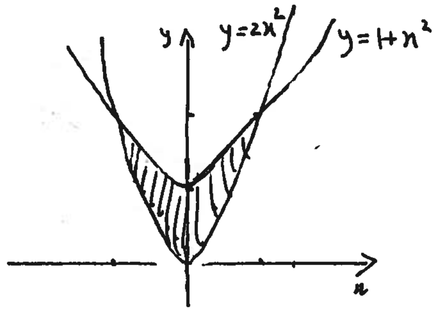


podendo o mesmo integral ser representado na forma

$$\int_0^{\log 2} \int_{e^y}^{2} f(x,y)\,dx\,dy .$$

[2.0] 6. Escreva um integral iterado que permita calcular a área da região do plano xOy limitada pelas parábolas de equação $y = 2x^2$ e $y = 1 + x^2$. (Não precisa de determinar o valor do integral.)

A área pedida pode ser calculada usando o integral $\int_{-1}^{1} \int_{2x^2}^{1+x^2} 1\,dy\,dx$.



7. (**Pergunta bónus:** A resposta a esta pergunta é facultativa. A sua cotação é de 1.5 valores. O total da cotação obtida com as respostas às perguntas 1 a 7 - inclui pergunta bónus - não ultrapassará os 10 valores.)

Determine o declive da recta tangente à curva $(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 4(x^2 + y^2)$ no ponto $(0,2)$.

O declive é dado por $\frac{dy}{dx}(0) = -\frac{f_x(0,2)}{f_y(0,2)} = \left[-\frac{2(x^2+y^2-2x).(2x-2)-8x}{2(x^2+y^2-2x).2y-8y}\right]_{(x,y)=(0,2)} = 1$

sendo $f(x,y) = (x^2+y^2-2x)^2 - 4(x^2+y^2)$

2ª Parte

Atenção: As respostas às perguntas seguintes devem ser cuidadosamente justificadas em folha(s) do caderno de prova, devidamente **identificada(s)**, com o nome e o número de aluno.

[5.0] 8. (a) Determine os extremos relativos da função $f(x,y) = 4xy - 2x^2 - y^4$.

(b) Indique os extremos absolutos de $g(x,y) = xy$ no conjunto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = 1\}$.

[5.0] 9. (a) Efectuando uma mudança de variáveis para coordenadas cilíndricas calcule $\iiint_E e^z\,dV$, onde E é a região do primeiro octante limitada pelo parabolóide $z = 1 + x^2 + y^2$ e interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 5$.

(b) Efectue uma mudança de variáveis de acordo com a transformação $T(u,v) = (x - y, x + y)$ para mostrar que $\iint_R (x-y)^2\,dA = \frac{8}{3}$, onde R é o paralelogramo de vértices $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$ e $(1,-1)$.

8(a) Os extremos de f serão solução do sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y-4x=0 \\ 4x-4y^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 4y(1-y^2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ y=0 \vee y=1 \vee y=-1 \end{cases}$$

ou seja, podem ser $(0,0)$, $(1,1)$ ou $(-1,1)$.

A matriz Hessiana de f é $\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -12y^2 \end{bmatrix}$.

No ponto $(0,0)$ o hessiano é $-16<0$, donde se conclui que em $(0,0)$ temos um ponto de sela.

Nos pontos $(1,1)$ e $(-1,-1)$ o hessiano é $32>0$ sendo o valor de $f_{xx}(1,1)=f_{xx}(-1,1)=-4<0$. Logo, a função f atinge em $(1,1)$ e em $(-1,-1)$ um valor de máximo relativo.

b) O conjunto D é limitado e fechado pelo que g atinge um máximo e um mínimo absolutos em D. Esses extremos serão solução do sistema $\nabla g = \lambda \nabla h$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$ e $h(x,y)=x^2+2y^2$, em D.

Ora $\nabla g = \lambda \nabla h \Leftrightarrow \begin{cases} y=\lambda 2x \\ x=\lambda 4y \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \frac{y}{2x} = \frac{x}{4y}$

(Note-se que $x \neq 0$ e $y \neq 0$, pois caso contrário $(x,y) \notin D$.)

Assim, temos $2y^2=x^2$. Como $x^2+2y^2=1$, então $x^2=\frac{1}{2}$, ou seja, $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Temos também $y^2=\frac{1}{4}$, ou seja, $y=\pm\frac{1}{2}$. As soluções em D do sistema são:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right) \text{ e } \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}\right).$$

Ora $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)=g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ é o máximo e

$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}\right)=g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$ é o mínimo.

9(a) A região de integração pode ser descrita usando coordenadas cilíndricas do seguinte modo:

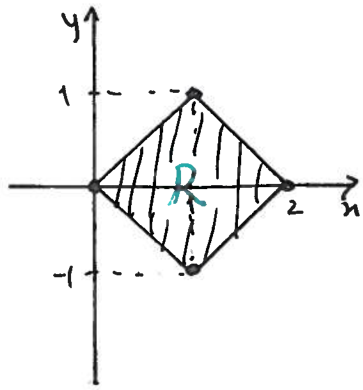
$$E = \left\{ (x,y,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z) : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq r \leq \sqrt{5},\ 0 \leq z \leq 1+r^2 \right\}.$$

Assim, $$\iiint_E e^z \, dV = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{5}} \int_0^{1+r^2} e^z . r \, dz \, dr \, d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta . \int_0^{\sqrt{5}} r . \left[e^z \right]_{z=0}^{z=1+r^2} dr = \frac{\pi}{2} . \int_0^{\sqrt{5}} r e^{1+r^2} - r \, dr$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{2} e^{1+r^2} - \frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=\sqrt{5}} = \frac{\pi}{4} \left(e^6 - e - 5 \right)$$

9(b) A região R pode ser descrita pelas condições $0 \leq x-y \leq 2$ e $0 \leq x+y \leq 2$, pelo que $T([0,2]\times[0,2]) = R$.



Temos $$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

pelo que $$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{2}.$$

Assim, $$\iint_R (x-y)^2 \, dA = \int_0^2 \int_0^2 u^2 . \frac{1}{2} . du \, dv = \int_0^2 dv \int_0^2 \frac{u^2}{2} du =$$

$$= 2 . \left[\frac{u^3}{6} \right]_0^2 = \frac{8}{3}.$$