FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Análise Matemática II *E*

Departamento de Matemática FCT-UNL
Exame - 23 de junho de 2014
Duração: 3 horas

Exame de Época de Recurso

Atenção: As respostas às perguntas seguintes devem ser cuidadosamente justificadas em folha(s) do caderno de prova, devidamente **identificada(s)** com o nome e o número de aluno.

[2.5] 1. Considere a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = y(1 + e^x)$.

(a) Verifique se a equação tem soluções constantes, e em caso afirmativo calcule-as.

(b) Calcule a solução que verifica a condição inicial $y(0) = e$.

Mude de Folha

[3.0] 2. Considere a equação diferencial $y' = 2 + 2x - y$.

(a) Determine uma solução geral da equação diferencial.

(b) Determine a solução que verifica a condição inicial $y(0) = 1$.

(c) Obtenha um valor aproximado da solução referida na alínea anterior no ponto $x = 0.2$, utilizando o método de Euler com passo $\Delta x = 0.1$.

Mude de Folha

[2.0] 3. Designe por $\mathcal{C}$ a curva resultante da intersecção do cilindro elíptico $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ com o plano $z = 2y$.

(a) Determine uma representação paramétrica da curva $\mathcal{C}$.

(b) Determine a recta tangente e o plano normal à curva $\mathcal{C}$ no ponto $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right)$.

Mude de Folha

[3.0] 4. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy\sin(x)}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

(a) Mostre que f é contínua na origem.

(b) Determine o gradiente de f em $(0,0)$.

(c) Estude a diferenciabilidade de f em $(0,0)$.

Mude de Folha

[2.5] 5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $(1,1)$ tal que $f(1,1) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 1$. Considere a função real ψ definida por $\psi(t) = f(1+t^2, 1+\sin(2t))$.

(a) Justifique que ψ diferenciável em 0 e determine $\psi'(0)$.

(b) Calcule a aproximação linear de f a partir de $f(1,1)$, obtida utilizando a diferenciabilidade e utilize-a para calcular um valor aproximado de $f(1,1;0,9)$.

Mude de Folha

[1.5] 6. Considere a função $f(x,y) = x^3y + xy^2 + 8e^y$.

(a) Verifique que $(-2,0)$ é ponto de estacionaridade.

(b) Estude o ponto $(-2,0)$ quanto a ser ponto de mínimo relativo, máximo relativo ou ponto de sela.

Mude de Folha

[1.5] 7. Utilize o método dos multiplicadores de Lagrange para determinar três números reais x, y, z, pertencentes à superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, de modo a que $2xyz$ tenha o valor mínimo.

Mude de Folha

[1.5] 8. Calcule $\displaystyle\iint_D xy\,dA$ sendo D a região do plano $x0y$ limitada pelas curvas de equação $y^2 = 4x$ e $x + y = 3$.

Mude de Folha

[2.5] 9. Considere o sólido E limitado pelo plano $z = 0$, pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e pelo cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.

(a) Descreva o sólido E usando coordenadas cilíndricas.

(b) Determine o volume de E.

(c) Considere o sólido S limitado pelo plano $z = 0$, pelo parabolóide $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ e pelo cilindro $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2\dfrac{x}{a}$ $(a, b > 0)$. Utilize uma mudança de coordenadas adequada de modo a calcular o volume de S.

Fim