Análise Matemática II *E*
Departamento de Matemática FCT-UNL

Tópicos de resolução do exame de recurso - 23 de junho de 2014

1. (a) Seja $y = c$, com $c \in \mathbb{R}$ uma solução constante da equação diferencial. Então $(c)' = c(1 + e^x)$, ou seja $c(1 + e^x) = 0$. Como $1 + e^x \neq 0$ concluímos que $c = 0$. Logo a única solução constante é $y = 0$. (b) Para $y \neq 0$ (pois $y(0) = e$) temos $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y(1 + e^x) \Leftrightarrow \frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (1 + e^x) \Leftrightarrow \log|y| = x + e^x + c \Leftrightarrow y = e^{e^x}.e^x.d$, onde d é uma constante positiva. Dada a condição inicial $y(0) = e$ temos $\log e = 1 + c$ ou seja $c = 0$. Assim sendo a solução pretendida é $y = e^{e^x}.e^x$.

2. (a) Temos $y' = 2 + 2x - y \Leftrightarrow y' + y = 2x + 2$. O fator integrante é e^x.

   Multiplicando ambos os membros pelo fator integrante obtemos $e^x y' + ye^x = (2x + 2)e^x \Leftrightarrow (ye^x)' = (2x + 2)e^x \Leftrightarrow ye^x = \int 2xe^x + 2e^x \mathrm{d}x \Leftrightarrow ye^x = 2xe^x + c \Leftrightarrow y = 2x + \frac{c}{e^x}$.

   (b) De $y(0) = 1$ vem $c = 1$. Logo a solução pretendida é $y = 2x + e^{-x}$.

   (c) Pelo método de Euler obtemos um valor aproximado de $y(0,2)$ tomando $y(0,2) \approx y_2$ onde $y_{i+1} = y_i + \Delta x\, f(x_i, y_i)$ e $x_{i+1} = x_i + \Delta x$, onde $\Delta x = 0,1$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ e $f(x, y) = 2 + 2x - y$. Efectuando os cálculos obtemos

i	0	1	2
x_i	0	$0,1$	$0,2$
y_i	1	1.1	$1,21$

   pois

   $y_1 = 1 + (2 + 2.0 - 1).(0,1) = 1,1$

   $y_2 = 1,1 + (2 + 2.(0,1) - 1,1).(0,1) = 1,21.$

3. (a) Uma parametrização obtém-se fazendo

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 2\sin t \end{cases}, \text{ com } t \in [0, 2\pi].$$

   Assim uma parametrização da curva dada é $(x, y, z) = (2\cos t, \mathrm{sen} t, 2\mathrm{sen} t)$, com $t \in [0, 2\pi]$.

   (b) Da representação paramétrica obtida em a), obtemos $(x, y, z) = (1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3})$ tomando $t = \frac{\pi}{3}$.

   Ora $\frac{dx}{dt} = -2\sin t$, $\frac{dy}{dt} = \cos t$, $\frac{dz}{dt} = 2\cos t$, pelo que o vector $(-2\sin t, \cos t, 2\cos t)_{t=\frac{\pi}{3}} = (-\sqrt{3}, \frac{1}{2}, 1)$ é tangente à curva $\mathcal{C}$ no ponto dado. Assim, $(x, y, z) = (1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}) + \lambda(-\sqrt{3}, \frac{1}{2}, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, é uma equação da recta tangente à curva $\mathcal{C}$ no ponto $(1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3})$.

O plano normal à curva $\mathcal{C}$ no ponto $(1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3})$ tem como vector normal o vector tangente à curva que obtivemos na alínea anterior. Assim a equação geral desse plano é

$$-\sqrt{3}(x-1) + \frac{1}{2}(y - \sqrt{3}2) + (z - \sqrt{3}) = 0.$$

4. (a) Temos $\left|\frac{xy\sin(x)}{x^2+y^2} - 0\right| = \frac{|x||y||\sin(x)|}{x^2+y^2} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}|\sin(x)|}{x^2+y^2} =$
$= |\sin(x)| \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$. Concluímos assim que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, ou seja, que f é contínua na origem.

   (b) Temos $f_x(0,0) = \frac{d}{dx}\left(f(x,0)\right)_{x=0} = \frac{d}{dx}(0) = 0$ e $f_y(0,0) = \frac{d}{dy}\left(f(0,y)\right)_{y=0} = \frac{d}{dy}(0) = 0$.

   (c) A função f é diferenciável em $(0,0)$ se existirem as derivadas parciais em $(0,0)$ (ver alínea b)) e se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)(x-0) - f_y(0,0)(y-0)}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\sin(x)}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

   for 0. Tomando o limite ao longo da curva de equação $x = y$ obtemos o limite $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2\sqrt{2}|x|}$ que não existe (ver limites laterais). Portanto, f não é diferenciável em $(0,0)$.

5. (a) Seja $g(t) = (1+t^2, 1+\sin(2t))$. A função g é diferenciável em $\mathbb{R}$. Além disso $\psi = f \circ g$, $g(0) = (1,1)$ e f é diferenciável em $(1,1)$. Concluímos assim que ψ é diferenciável em 0. Pela regra da cadeia:

$$\psi'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\frac{d}{dt}(t^2)_{t=0} + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\frac{d}{dt}(1+\sin(2t))_{t=0} = 2.$$

   (b) A aproximação linear L de f em $(1,1)$ é $L(x,y) = f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1) = 2x+y-2$. Donde $f(1,1;0,9) \approx L(1,1;0,9) = 1,1$.

6. (a) Dado que $f_x(x,y) = 3x^2y + y^2$ e $f_(x,y) = x^3 + 2xy + 8e^y$, fácilmente se verifica que $f_x(-2,0) = f_y(-2,0) = 0$.

   (b) Como $f_{xx}(x,y) = 6xy$, $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 3x^2+2y$ e $f_{yy}(x,y) = 2x + 8e^y$, temos que

$$\left|\begin{array}{cc} 6xy & 3x^2+2y \\ 3x^2+2y & 2x+8e^y \end{array}\right|_{(x,y)=(-2,0)} = -12^2 < 0.$$

   Donde $(-2,0)$ é um ponto de sela.

7. No problema indicado pretende-se minimizar a função $f(x,y,z) = 2xyz$ sujeita à condição $g(x,y,z) = 1$, onde $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Note que neste problema se $x = 0$ ou $y = 0$ ou $z = 0$, então $f(x,y,z) = 0$. Vamos assumir que x, y e z são não nulos (caso contrário o valor mínimo atingido já sabemos ser 0).

Pelo Teorema dos multiplicadores de Lagrange os pontos de extremo deste problema são solução do sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y,z) = \lambda g_x(x,y,z) \\ f_y(x,y,z) = \lambda g_y(x,y,z) \\ f_z(x,y,z) = \lambda g_z(x,y,z) \\ g(x,y,z) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2yz = 2\lambda x \\ 2xz = \lambda y \\ 2xy = \lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xyz = x^2\lambda \\ xyz = y^2\lambda \\ xyz = z^2\lambda \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Logo $x^2 = y^2 = z^2$ (note $\lambda \neq 0$) donde como $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ se tem $x^2 = y^2 = z^2 = \frac{1}{3}$.

Assim as soluções (x^*, y^*, z^*) do sistema para as quais se obtém o valor mínimo $f(x^*, y^*, z^*) = -\sqrt{3}$ (um valor inferior a zero o que elimina as soluções com $x = 0$, $y = 0$ ou $z = 0$) são: $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$.

8. As curvas dadas intersectam-se nos pontos (x,y) da forma $(1,2)$ e $(9,-6)$ (elabore um esboço das mesmas). Assim, a região D pode ser descrita por

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -6 \leq y \leq 2, \frac{y^2}{4} \leq x \leq 3 - y\right\}.$$

Assim, $\displaystyle\iint_D xy\,dA = \int_{-6}^{2}\int_{\frac{y^2}{4}}^{3-y} xy\,dxdy = \int_{-6}^{2} y\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{y^2}{4}}^{3-y} dy = \int_{-6}^{2} \frac{9}{2} - 3y^2 + \frac{y^3}{2} - \frac{y^5}{32}\,dy =$
$= \left[\frac{9y}{2} - y^3 + \frac{y^4}{8} - \frac{y^6}{6\times 32}\right]_{-6}^{2} = -\frac{316}{3}$.

9. (a) A região E pode descrever-se usando coordenadas cilíndricas do seguinte modo:

$$E = \{(x,y,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z) \in \mathbb{R}^3 : -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2\cos\theta, 0 \leq z \leq r^2\}.$$

(b) O volume de E é dado pelo integral

$$\iiint_E 1\,dV = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta}\int_0^{r^2} r\,dzdrd\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta} r^3\,drd\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^4\theta\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos(2\theta))^2\,d\theta =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1+2\cos(2\theta)+\cos^2(2\theta)\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1+2\cos(2\theta)+\frac{1}{2}(1+\cos(4\theta))\,d\theta = \left[\frac{3}{2}\theta + \sin(2\theta) + \frac{1}{8}\sin(4\theta)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}\pi$$

(c) Considere a mudança de variáveis $u = \frac{x}{a}$ $v = \frac{y}{b}$ e $w = z$ que tem por jacobiano $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \frac{1}{ab} \neq 0$ e transforma o conjunto E no conjunto S.

Aplicando esta mudança de variáveis obtemos o volume de S tomando

$$\iiint_S 1 \, dV_{xyz} = \iiint_E \frac{1}{ab} \, dV_{uvw} = \frac{1}{ab} \frac{3}{2} \pi.$$