Análise Matemática II *E*

Departamento de Matemática FCT-UNL
Resolução do primeiro teste - 2º Sem - 2013/2014

[3.5] 1. Considere a equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} = y\left(\dfrac{1}{x} - \tan x\right) + x\cos x$.

(a) Mostre que $\mu(x) = \dfrac{1}{x\cos x}$ é um factor integrante da equação diferencial.

(b) Determine a solução $y(x)$ da equação que verifica a condição inicial $y(\pi) = 0$ em $I =]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

R: (a) De facto $\mu'(x) = \frac{-\cos x + x\sin x}{x^2\cos x} = \mu(x)\left(-\frac{1}{x} + \tan x\right)$, donde multiplicando ambos os membros da equação diferencial por μ obtemos $\mu\frac{dy}{dx} - \mu\left(\frac{1}{x} - \tan x\right)y = \mu\, x\cos x$, ou seja, $(\mu y)' = \mu x\cos x$.

(b) Tomando a equação em (a) temos $(\mu y)' = 1$, ou seja, $\frac{y}{x\cos x} = x + c \Leftrightarrow y(x) = x(x+c)\cos x$, em que $c \in \mathbb{R}$. Como $y(\pi) = 0$ então $c = -\pi$ pelo que a solução do PVI é $y(x) = x(x-\pi)\cos x$.

[3.5] 2. Considere a equação diferencial $y' = y^2 e^x$.

(a) Verifique se a equação admite soluções de equilíbrio (ou seja, soluções constantes), e em caso afirmativo determine-as.

(b) Determine a solução $y(x)$ da equação que verifica a condição inicial $y(0) = -1$.

R: (a) Se y é constante, então $y' \equiv 0$. Da equação diferencial resulta que $y \equiv 0$ é a única solução constante.

(b) Para $y \not\equiv 0$ (podemos excluir este caso pois $y \equiv 0$ é uma solução constante que não satisfaz a condição inicial) a equação diferencial é equivalente a

$$\frac{y'}{y^2} = e^x \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\int\left(\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}\right)dx = e^x \Leftrightarrow -\frac{1}{y^3} = e^x + c.$$

Como $y(0) = -1$ então $c = 0$ e a solução do PVI é $y(x) = e^{-x/3}$.

[2.5] 3. Determine um valor aproximado da solução do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = 4 - 2x \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

no ponto $x = 2$ utilizando o método de Euler com um passo de $\Delta x = 0.5$.

Compare com a solução exacta do problema indicando o erro absoluto cometido.

R: Pelo método de Euler obtemos um valor aproximado de $y(2)$ tomando $y(2) \approx y_4$ onde $y_{i+1} = y_i + \Delta x\, f(x_i, y_i)$ e $x_{i+1} = x_i + \Delta x$, onde $\Delta x = 0.5$, $x_0 = 0$, $y_0 = 2$ e $f(x,y) = 4 - 2x$. Efectuando os cálculos obtemos

i	0	1	2	3	4
x_i	0	0,5	1	1,5	2
y_i	2	4	5,5	6,5	7

pois

$$y_1 = 2 + 0.5(4 - 2\cdot 0) = 4$$
$$y_2 = 4 + 0.5(4 - 2\cdot 0.5) = 5.5$$
$$y_3 = 5.5 + 0.5(4 - 2\cdot 1) = 6.5$$
$$y_4 = 6.5 + 0.5(4 - 2\cdot 1.5) = 7.$$

A solução exacta do problema é $y(2) = 4$ com $y(x) = 4x - x^2$ pelo que o erro absoluto cometido é $|4 - 7| = 3$.

[2.5] 4. Considere a superfície S definida pela equação $x = \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{4}$.

(a) Classifique a superfície.

(b) Verifique se S se trata de uma superfície de revolução, e em caso afirmativo descreva essa revolução (isto é, indique que curva roda em torno de que eixo).

(c) Escreva a equação da superfície que se obtém por reflexão de S no plano $y = x$.

R: (a) A superfície S é um parabolóide que se posiciona no vértice $(0, 0, 0)$ e se prolonga ao longo do eixo positivo dos x's. (As intersecções com planos de equação $x = a$, com $a > 0$, dão origem a circunferências, e a intersecção com os planos $y = 0$ e $z = 0$ originam parábolas.)

(b) A superfície S é uma superfície de revolução onde a parábola de equação $x = \frac{y^2}{4}$ roda em torno do eixo dos x's.

(c) A reflexão de S no plano $y = x$ dá origem à superfície de equação $y = \frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{4}$.

[3.0] 5. Considere a região R do plano definida pelas pelas condições $y \geq 0$ e $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}$. Descreva a região por meio de inequações da forma:

$$\begin{cases} r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta) \\ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \end{cases}$$

onde (r, θ) são as coordenadas polares de um ponto do plano.

R: O conjunto R pode ser descrito em coordenadas polares através das condições $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 \leq r \leq \cos\theta$.

[5.0] 6. Considere a equação diferencial $y' = f(ax + by + c)$ em que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e $a + bf(t) \neq 0$, para todo o $t \in \mathbb{R}$.

(a) Mostre que uma mudança de variável $u(x) = ax + b\,y(x) + c$ transforma a equação numa equação de variáveis separáveis.

(b) Usando o método agora descrito resolva o PVI: $y' = e^{2x+y-1} - 2$, com $y(0) = 1$.

R: (a) Caso $b = 0$ a equação é claramente separável. Caso $b \neq 0$ e tomando $u = ax + by + c$ temos $\frac{du}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$ pelo que a equação diferencial é equivalente a

$$\frac{du}{dx} = a + bf(u) \Leftrightarrow \frac{1}{a + bf(u)}\frac{du}{dx} = 1$$

(note que $a + bf(t) \neq 0$, para todo o $t \in \mathbb{R}$) que é obviamente separável.

(b) Consideremos a função contínua f dada por $f(t) = e^t - 2$ e que satisfaz $a + bf(t) \neq 0$, para todo o $t \in \mathbb{R}$, sendo $a = 2$ e $b = 1$. Usando a mudança de variável sugerida, a equação dada é equivalente a

$$\frac{1}{2 + (e^u - 2)}\frac{du}{dx} = 1 \Leftrightarrow e^{-u}u' = 1 \Leftrightarrow -e^{-u} = x + c \Leftrightarrow u(x) = -\log(-x - c).$$

Desfazendo a mudança de variável obtemos $2x + y - 1 = -\log(-x - c) \Leftrightarrow y(x) = 1 - 2x - \log(-x - c)$. Como $y(0) = 1$ então $c = -1$ pelo que a solução do PVI é $y(x) = 1 - 2x - \log(1 - x)$.