FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Análise Matemática II *E*

Departamento de Matemática FCT-UNL
Segundo teste - 14 de maio de 2014
Duração: 1h30m

2º Teste

Atenção: As respostas às perguntas seguintes devem ser cuidadosamente justificadas em folha(s) do caderno de prova, devidamente **identificada(s)** com o nome e o número de aluno.

[3.0] 1. Considere o sólido E de $\mathbb{R}^3$ que satisfaz as condições $z^2 \leq x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ e $y \geq 0$.

(a) Descreva a região E por meio de inequações da forma:

$$\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \ , \qquad \phi_1(\theta) \leq \phi \leq \phi_2(\theta) \ , \qquad \rho_1(\theta, \phi) \leq \rho \leq \rho_2(\theta, \phi) \ ,$$

onde (ρ, θ, ϕ) são as coordenadas esféricas de um ponto do espaço.

(b) Descreva a região E por meio de inequações da forma:

$$\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \ , \qquad z_1(\theta) \leq z \leq z_2(\theta) \ , \qquad r_1(\theta, z) \leq r \leq r_2(\theta, z) \ ,$$

onde (r, θ, z) são as coordenadas cilíndricas de um ponto do espaço.

Mude de Folha

[3.5] 2. Designe por $\mathcal{C}$ a curva resultante da intersecção das superfícies de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $x = y$.

(a) Determine uma representação paramétrica da curva $\mathcal{C}$.

(b) Indique uma equação da recta tangente à curva $\mathcal{C}$ no ponto $(1, 1, \sqrt{2})$.

(c) Suponha que $\vec{\sigma}(t)$ $(t \in I)$ é o vector posição de uma partícula que se move no espaço ao longo da curva $\mathcal{C}$. Mostre que os vectores posição e velocidade são ortogonais em qualquer instante.

Caso não tenha respondido à alínea (a), considere para as alíneas seguintes a parametrização $x = \sqrt{2}\cos t$, $y = \sqrt{2}\sin t$, $z = \sqrt{2}$, *com* $t \in [0, 2\pi]$.

[1.5] 3. As curvas correspondentes aos gráficos das funções $\vec{r}(t) = (t^3 - 3t^2 + 2)\mathbf{i} - 2(t-1)^2\mathbf{j} + (t-1)\mathbf{k}$ e $\vec{\sigma}(s) = 3s\mathbf{i} + s\mathbf{j} + \sin(s)\mathbf{k}$ intersectam-se na origem (verifique). Determine o ângulo entre as rectas tangentes a cada uma das curvas na origem.

Mude de Folha

[5.0] 4. Considere a função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \dfrac{x^2\sin(y) + y^2\sin(x)}{x^2+y^2}$.

(a) Indique o domínio D de f.

(b) Determine o limite de f ao longo de qualquer recta que passe em $(0,0)$.

(c) Mostre que existe o limite de f na origem e aproveite este resultado para justificar que f é prolongável por continuidade ao ponto $(0,0)$. Defina esse prolongamento e denote-o por g.

(d) Calcule as derivadas parciais de primeira ordem de g em $(0,0)$.

(e) Estude a diferenciabilidade de g na origem.

Mude de Folha

[2.0] 5. Considere uma aproximação linear local de uma função diferenciável de duas variáveis apropriada para determinar um valor aproximado de $(3,98)e^{0,01}$.

Mude de Folha

[2.5] 6. Considere a função f diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e seja ainda $g(x,y,z) = x\, f\left(xy, \frac{x^2}{z}\right)$. Sabendo que $f(2,4) = -1$, $f_u(2,4) = 1$ e $f_v(2,4) = 2$, verifique que:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(2,1,1) + \frac{\partial g}{\partial z}(2,1,1) = 1.$$

[2.5] 7. Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in int(D)$. Justifique detalhadamente que, se f é diferenciável em (x_0, y_0), então f é contínua em (x_0, y_0).

Fim