Resolução do segundo teste - 14 de maio de 2014

1. (a) A região E é descrita pelas condições $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \rho \leq 1$, e $\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{3\pi}{4}$ usando coordenadas esféricas.

   (b) A região E é descrita pelas condições $0 \leq \theta \leq \pi$, $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq z \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, $|z| \leq r \leq \sqrt{1-z^2}$ usando coordenadas cilíndricas.

2. Substituindo na equação $x^2+y^2+z^2=4$ a variável y por x, obtemos uma elipse no plano $x=y$,

$$\Leftrightarrow 2x^2+z^2=4 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{z}{2}\right)^2=1.$$

   Uma parametrização da elipse (no plano $x=y$) obtem-se tomando

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{2}} = \cos t \\ \frac{z}{4} = \sin t \end{cases} \quad \text{, com } t \in [0,2\pi].$$

   Assim uma parametrização da curva dada é $x=\sqrt{2}\cos t$, $y=\sqrt{2}\cos t$, $z=2\sin t$, com $t\in[0,2\pi]$.

   (b) Da representação paramétrica obtida em a), obtemos $(x,y,z)=(1,1,\sqrt{2})$ tomando $t=\frac{\pi}{4}$.

   Ora $\frac{dx}{dt}=-\sqrt{2}\sin t$, $\frac{dy}{dt}=-\sqrt{2}\sin t$, $\frac{dz}{dt}=2\cos t$, pelo que o vector $\left(-\sqrt{2}\sin t,-\sqrt{2}\sin t,2\cos t\right)_{t=\frac{\pi}{4}}=(-1,-1,\sqrt{2})$ é tangente à curva $\mathcal{C}$ no ponto dado. Assim, $(x,y,z)=(1,1,\sqrt{2})+\lambda(-1,-1,\sqrt{2})$, $\lambda\in\mathbb{R}$, é uma equação da recta tangente à curva $\mathcal{C}$ no ponto $(12,2,0)$.

   (c) Para cada $t \in I$ o ponto $\vec{\sigma}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ satisfaz a equação $x^2+y^2+z^2=4$, pelo que $x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)=4$, para todo o $t\in I$. Assim $\frac{d}{dt}\left(x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)\right)=0 \Leftrightarrow 2x(t)\cdot x'(t)+2y(t)\cdot y'(t)+2z(t)\cdot z'(t)=0 \Leftrightarrow 2\vec{\sigma}(t)\cdot\vec{\sigma}'(t)=0$, c.q.d..

3. Temos $\vec{r}(1)=(0,0,0)=\vec{\sigma}(0)$. Além disso, $\vec{r}'(t)=(3t^2-6t)\mathbf{i}-4(t-1)\mathbf{j}+\mathbf{k}$ e $\vec{\sigma}(s)=3\mathbf{i}+\mathbf{j}+\cos(s)\mathbf{k}$, donde os vectores tangentes às curvas na origem são respectivamente $\vec{r}'(1)=-3\mathbf{i}+\mathbf{k}$ e $\vec{\sigma}(0)=3\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$. O ângulo θ entre as rectas tangentes a cada uma das curvas na origem é $\arccos\left(\left|\frac{(-3,0,1)\cdot(3,1,1)}{\|(-3,0,1)\|\,\|(3,1,1)\|}\right|\right)=\arccos\left(\frac{8}{\sqrt{10}\sqrt{11}}\right)$.

4. (a) O domínio de f é $D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

(b) Seja $m \in \mathbb{R}$ e consideremos as rectas de declive m que passam na origem com equação $y = mx$. Temos

$$\lim_{\substack{(x,\,y)\,\to\,(0,\,0)\\ y\,=\,mx}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(\sin(mx)+m^2\sin(x))}{x^2(1+m^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(mx)+m^2\sin(x)}{1+m^2} = 0.$$

Ao longo da recta de equação $x = 0$ obtemos $\lim\limits_{\substack{(x,\,y)\,\to\,(0,\,0)\\ x\,=\,0}} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = 0.$

(c) Temos $\left|\frac{x^2\sin(y)+y^2\sin(x)}{x^2+y^2} - 0\right| = \frac{\left|x^2\sin(y)+y^2\sin(x)\right|}{x^2+y^2} \leq \frac{x^2|\sin(y)|+y^2|\sin(x)|}{x^2+y^2} \leq \frac{(x^2+y^2)|\sin(y)|+(x^2+y^2)|\sin(x)|}{x^2+y^2} =$
$= |\sin(x)| + |\sin(y)| \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0.$

Considere-se $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ que prolonga $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Observe-se que g é contínua em $(0,0)$ pois $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = g(0,0)$.

(d) Temos $g_x(0,0) = \frac{d}{dx}\left(f(x,0)\right)_{x=0} = \frac{d}{dx}(0) = 0$ e $g_y(0,0) = \frac{d}{dy}\left(g(0,y)\right)_{y=0} = \frac{d}{dy}(0) = 0$.

(e) A função g é diferenciável em $(0,0)$ se existirem as derivadas parciais em $(0,0)$ (ver alínea b)) e se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y)-g(0,0)-g_x(0,0)(x-0)-g_y(0,0)(y-0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\sin(y)+y^2\sin(x)}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

for 0. Tomando o limite ao longo da curva de equação $x = y$ obtemos o limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\sqrt{2}|x|}$ que não existe (ver limites laterais). Portanto, g não é diferenciável em $(0,0)$.

5. Considere-se a função $f(x,y) = xe^y$ diferenciável em $(4,0)$. Temos $f_x(x,y) = e^y$, donde $f_x(4,0) = 1$, e $f_y(x,y) = xe^y$, donde $f_y(4,0) = 4$.

   Assim, a aproximação linear local de f em $(4,0)$ é

$$L(x,y) = f(4,0) + f_x(4,0)(x-4) + f_y(4,0)(y-0) = x + 4y.$$

   Portanto, podemos aproximar o valor pretendido tomando

$$(3,98) * e^{0,01} \approx L(3,98;0,01) = 4,02.$$

6. Notemos que g é uma função diferenciável em $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,0) : x,y \in \mathbb{R}\}$, pois g resulta do produto de uma função linear (donde diferenciável) pela composição de f (que é diferenciável em $\mathbb{R}^2$) com as funções diferenciáveis em D, xy e $\frac{x^2}{z}$.

   Assim, no ponto $(2,1,1)$ temos

$$\frac{\partial g}{\partial x}(2,1,1) = \left[f\left(xy, \frac{x^2}{z}\right)\right]_{x=2,y=z=1} + \left[xy\, f_u\left(xy, \frac{x^2}{z}\right) + \frac{2x^2}{z} f_v\left(xy, \frac{x^2}{z}\right)\right]_{x=2,y=z=1} =$$

$$= f\,(2,4) + 2\,f_u\,(2,4) + 8f_v\,(2,4) = 17$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial z}(2,1,1) = \left[-\frac{x^3}{z^2}\,f_v\left(xy,\frac{x^2}{z}\right)\right]_{x=2,y=z=1} = -8\,f_v\,(2,4) = -16.$$

7. Admitamos que f é diferenciável em $(x_0,y_0)\in int(D)$ e sejam $L(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$ e $E(x,y)=f(x,y)-L(x,y)$. Temos

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} L(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left(f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)\right) = f(x_0,y_0)+0+0$$

e, como f é diferenciável em (x_0,y_0),

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} E(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{E(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = 0\cdot 0 = 0.$$

Como $f(x,y)=E(x,y)+L(x,y)$ concluímos que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [E(x,y)+L(x,y) = 0 + f(x_0,y_0) = f(x_0,y_0)$$

e portanto f é contínua em (x_0,y_0).