FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

**Análise Matemática II *E***
Departamento de Matemática FCT-UNL
Terceiro teste - 11 de junho de 2014
Duração: 1h30m

**3º Teste**

Atenção: As respostas às perguntas seguintes devem ser cuidadosamente justificadas em folha(s) do caderno de prova, devidamente **identificada(s)** com o nome e o número de aluno.

[2.5] 1. Considere a função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^3-2x^2y^2}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

(a) Determine o gradiente de $f$ em $(0,0)$.

(b) Determine a derivada direccional $D_{\vec{u}}f(0,0)$, sendo $\vec{u}$ o vector unitário $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$. Será $f$ diferenciável em $(0,0)$? Justifique.

[3.5] 2. Considere as superfícies $\mathcal{S}_1$ definida por $xz-yz^3+yz^2=2$ e $\mathcal{S}_2$ correspondente ao gráfico da função $f(x,y)=-\dfrac{x^2}{12}+(y+1)^2+\dfrac{4}{3}$.

(a) Verifique que o ponto $(2,-1,1)$ pertence à intersecção das duas superfícies e que estas têm o mesmo plano tangente nesse ponto.

(b) Determine a recta normal às duas superfícies nesse ponto.

(c) Determine o declive da superfície $\mathcal{S}_2$ no ponto $(2,-1,1)$ na direcção do vector $\mathbf{i}+\sqrt{3}\mathbf{j}$, e diga se a cota aumenta ou diminui.

(d) Indique o sentido de máximo crescimento do declive de $\mathcal{S}_2$ no ponto da superfície em que $(x,y)=(2,-1)$.

Mude de Folha

[4.0] 3. (a) Estude a função $f(x,y)=(x-y)^2+\dfrac{y^4}{4}-\dfrac{y^2}{2}$ quanto a máximos relativos, mínimos relativos e pontos sela.

(b) De entre as caixas, em forma de paralelipípedo, com três faces nos planos coordenados e um vértice no primeiro octante no plano $x+y+z=1$, determine utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange aquela que tem maior volume.

[3.0] 4. Calcule $\displaystyle\iint_R x^2\,dA$, em que $R$ é a região do primeiro quadrante limitada pelas curvas de equação $xy=1$, $y=x$ e $y=2x$.

Mude de Folha

[3.5] 5. Utilize coordenadas cilíndricas ou esféricas para calcular o integral $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} z^2\,dzdxdy.$

[3.5] 6. Considere a região do plano $R$, limitada pelas rectas $x-2y=-2$, $x-2y=2$, $x+2y=-3$ e $x+2y=3$. Efectue uma mudança de variáveis conveniente de modo a calcular o integral $\displaystyle\iint_R xy\,dA$.

Fim