Resolução do tercceiro teste - 11 de junho de 2014

1. (a) Por definição

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{d}{dx}\left(f(x,0)\right)_{x=0} = \frac{d}{dx}(0)_{x=0} = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{d}{dy}\left(f(0,y)\right)_{y=0} = \frac{d}{dy}(y)_{y=0} = 1.$$

Logo, $\nabla f(0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = (0,1)$.

(b) Temos

$$D_{\vec{u}}f(0,0) = \frac{d}{ds}\left(f\left(\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right)_{s=0} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}s^3 - \frac{1}{2}s^4}{s^2}\right)_{s=0} = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}s - \frac{1}{2}s^2\right)_{s=0} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Temos por um lado $D_{\vec{u}}f(0,0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ e por outro $\nabla f(0,0)\cdot\vec{u} = (0,1)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Caso f fosse diferenciável em $(0,0)$ estes dois valores seriam iguais. Podemos por isso concluir que f não é diferenciável em $(0,0)$.

2. (a) A superfície $\mathcal{S}_1$ representa uma superfície de nível (de valor 2) da função

$$F(x,y,z) = xz - yz^3 + yz^2\,,$$

tendo-se $F(2,-1,1) = 2$, pelo que o ponto $(2,-1,1)$ pertence à superfície $\mathcal{S}_1$. Como as derivadas parciais de primeira ordem de F são contínuas, pois

$$F_x(x,y,z) = z, \qquad F_y(x,y,z) = -z^3 + z^2, \qquad F_z(x,y,z) = x - 3yz^2 + 2yz,$$

e $\nabla F(2,-1,1) = (1,0,3)$, pode concluir-se que este vector é perpendicular à superfície no ponto $(2,-1,1)$, e por isso normal ao plano tangente à superfície $\mathcal{S}_1$ no ponto $(2,-1,1)$.

Relativamente à superfície $\mathcal{S}_2$, esta correspondente ao gráfico da função $f(x,y) = -\frac{x^2}{12} + (y+1)^2 + \frac{4}{3}$. Notemos que o ponto $(2,-1,1)$ pertence à superfície pois $f(2,-1) = 1$. Sendo a função diferenciável em $(2,-1)$ o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(2,-1,1)$ tem vector normal $(-f_x(2,-1), -f_y(2,-1), 1)$. Como

$$f_x(x,y) = -\frac{x}{6}, \qquad f_y(x,y) = 2(y+1),$$

a superfície $\mathcal{S}_2$ tem plano tangente no ponto $(2,-1,1)$ com vector normal $(\frac{1}{3}, 0, 1)$.

Notemos que os vectores $(\frac{1}{3}, 0, 1)$ e $(1, 0, 3)$ são colineares, pelo que as superfícies $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ têm o mesmo plano tangente no ponto $(2, -1, 1)$.

A equação do plano tangente é dada por $(1, 0, 3) \cdot (x-2, y+1, z-1) = 0\,.$

(b) A direção da recta normal às superfícies é dada pelo vector $\nabla F(2,-1,1) = (1,0,3) = 3\cdot(-f_x(2,-1), -f_y(2,-1), 1)\,,$ pelo que as respectivas equações paramétricas são $x = 2+t\,,\ y = -1\,,\ z = 1+3t\ \ (t \in \mathbb{R})$.

(c) O declive da superfície $\mathcal{S}_2$ no ponto $(2, -1, 1)$ na direcção do vector $\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j}$ é-nos dado pela derivada direccional $D_{\vec{v}} f(2, -1)$, sendo v o vector unitário $\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$ com o mesmo sentido de $\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j}$.

Como f é diferenciável em $(2, -1)$ temos $D_{\vec{v}} f(2,-1) = \nabla f\,(2,-1)\cdot\vec{v} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(2,-1), \frac{\partial f}{\partial y}(2,-1)\right)\cdot\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\frac{1}{3}, 0\right)\cdot\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{6}$. Como $D_{\vec{v}} f(2,-1) < 0$ a cota diminui.

(d) O sentido de máximo crescimento do declive de $\mathcal{S}_2$ é dado em cada ponto (x, y) por $\nabla f(x, y)$, ou seja, $(-\frac{x}{6}, 2(y+1))$. Em particular, quando $(x, y) = (2, -1)$ o vector $-\frac{1}{6}\mathbf{i}$ indica o sentido de maior crescimento do declive de $\mathcal{S}_2$. (Note-se que no ponto $(0, -1)$ todas as derivadas direccionais são nulas sendo por isso um ponto de estacionariedade.)

3. (a) A função f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$. Temos $f_x(x, y) = 2(x-y)$ e $f_y(x, y) = -2(x-y) + y^3 + y$. Assim, os pontos críticos são as soluções do seguinte sistema:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y(y^2-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ----- \\ y = 0 \ \vee\ y = 1 \ \vee\ y = -1 \end{cases}$$

ou seja, os pontos críticos são: $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(-1, -1)$.

Temos $A = f_{xx}(x, y) = 2$, $f_{yy}(x, y) = 3y^2+1$ e $f_{xy}(x, y) = -2$, pelo que a matriz Hessiana de f nos pontos críticos indicados tem determinante $D(x, y) = 6y^2 - 2$. Logo, $f(1, 1)$ e $f(-1, -1)$ são mínimos locais de f, pois $D(1, 1) = D(-1, -1) = 4 > 0$ e $A > 0$, e $(0, 0, 0)$ é um ponto de sela pois $D(0, 0) = -2 < 0$.

(b) No problema indicado pretende-se maximizar a função $f(x, y, z) = xyz$ (que indica o volume do paralelipípedo) sujeita à condição $g(x, y, z) = 1$, onde $g(x, y, z) = x + y + z$. Note que neste problema $x, y, z > 0$. Pelo Teorema dos multiplicadores de Lagrange os pontos de extremo deste problema são solução do sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y,z) = \lambda g_x(x,y,z) \\ f_y(x,y,z) = \lambda g_y(x,y,z) \\ f_z(x,y,z) = \lambda g_z(x,y,z) \\ g(x,y,z) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yz = \lambda \\ xz = \lambda \\ xy = \lambda \\ x+y+z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xyz = x\lambda \\ xyz = y\lambda \\ xyz = z\lambda \\ x+y+z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xyz = x\lambda = y\lambda = z\lambda \\ x+y+z = 1 \end{cases}$$

Como $x, y, z \neq 0$ também $\lambda \neq 0$, pelo que então $x = y = z = \frac{1}{3}$.

A caixa de maior volume que satisfaz as condições pedidas é o cubo com vértice no primeiro octante em $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

4. O domínio de integração R envolvido no cálculo do integral pode ser descrito como a união de dois conjuntos R_1 e R_2, onde $int(R_1) \cap int(R_2) = \emptyset$,

$$R_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}},\, x \leq y \leq 2x\right\}$$

e

$$R_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1,\, x \leq y \leq \frac{1}{x}\right\}.$$

Assim, $\displaystyle\iint_R x^2\, dA = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_x^{2x} x^2\, dydx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \int_x^{\frac{1}{x}} x^2\, dydx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^3\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (x - x^3)\, dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \left[x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 = \frac{3}{8}$.

5. A região D envolvida no cálculo do integral dado é o conjunto

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq 2,\, 0 \leq x \leq \sqrt{4 - y^2},\, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{8 - x^2 - y^2}\}$$

Esta região também pode ser representada em coordenadas esféricas por

$$D = \{(x, y, z) = (\rho \sin\phi \cos\theta, \rho \sin\phi \sin\theta, \rho \cos\phi) : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\, 0 \leq \rho \leq 2\sqrt{2},\, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}\}.$$

Assim, $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} z^2\, dzdxdy = \iiint_D z^2\, dV = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\rho^2 \cos^2\phi)(\rho^2 \sin\phi)\, d\phi d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\sqrt{2}} \rho^4\, d\rho \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\phi \sin\phi\, d\phi = \frac{\pi}{2}\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^{2\sqrt{2}} \frac{1}{3}\left[-\cos^3\phi\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{2^5\pi}{15}$.

6. A transformação do plano $u = x - 2y$ e $v = x + 2y$ transforma as rectas que definem o conjunto R nas recta $u = -2$, $u = 2$, $v = -3$ e $v = 3$, que definem o conjunto S do plano uOv. Além disso o jacobiano da transformação $(x, y) = T(u, v)$ é dado por:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\right)^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}.$$

Portanto, $\displaystyle\iint_R xy\, dA_{x,y} = \iint_S \frac{1}{8}(v+u)(v-u)\left|\frac{1}{4}\right|\, dA_{u,v} = \int_{-2}^2 \int_{-3}^3 \frac{1}{32}(v^2 - u^2)\, dvdu = \frac{1}{32}\int_{-2}^2 \left[\frac{v^3}{3} - vu^2\right]_{v=-3}^3 du = \frac{1}{32}\int_{-2}^2 18 - 6u^2\, du = \frac{5}{4}$.