FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Análise Matemática II E

Departamento de Matemática FCT-UNL

Recurso (08/01/2015) - 1º Semestre - 2014/2015

1ª Parte

1. Considere a equação diferencial $\operatorname{sen}(t)y' + \cos(t)y = \cos(2t)$. Determine:
   (a) a solução geral;
   (b) a solução y cujo gráfico contem o ponto $(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2})$.

2. Considere a equação diferencial $y' = 3xy$ e $y(0) = 1$. Determine:
   (a) O valor aproximado da solução da equação diferencial no ponto $x = 0,2$ utilizando o método de Euler com passo $\Delta x = 0,1$.
   (b) A solução da equação diferencial.
   (c) O erro absoluto da aproximação.

3. Determine uma representação paramétrica da curva resultante da interseção das superfícies $z = x^2 + y^2$ e $2x - 4y - z = 1$.

4. Considere a curva $\mathcal{C}$ em $\mathbb{R}^3$ definida por $r(t) = (3t+2)\overrightarrow{i} + (t^2-7)\overrightarrow{j} + (t-t^2)\overrightarrow{k}$, para $0 \leq t \leq 5$.
   (a) Determine a equação da reta tangente à curva $\mathcal{C}$ no ponto $(5, -6, 0)$.
   (b) Sabendo que uma partícula viaja ao longo de curva $\mathcal{C}$ até ao instante $t = 1$ e após esse instante na reta tangente calculada na alínea anterior, calcule a posição da partícula no instante $t = 2$.

5. Considere a função $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
   (a) Determine o domínio da função z.
   (b) Determine e esboce as curvas de nível $z(x, y) = k$ para $k = 0, 1$ e 2.
   (c) Considere o sólido
   $$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}, \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \text{ e } x \leq 0\}.$$
   Descreva D em coordenadas cilíndricas ou esféricas.

Análise Matemática II E

Departamento de Matemática FCT-UNL

Recurso (08/01/2015) - 1º Semestre - 2014/2015

2ª Parte

6. Considere a função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2 \operatorname{sen} y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a) Estude f quanto à continuidade no ponto $(0,0)$.

   (b) Calcule o gradiente de f no ponto $(0,0)$.

   (c) Determine a derivada direcional de f no ponto $(0,0)$, na direção $u = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$.

   (d) Averigue se f é diferenciável no ponto $(0,0)$.

7. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por $f(u,v) = u^2 - 2v$ e $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por

$$g(x,y,z) = f(\sqrt{x^2+y^2}, \frac{z}{2}).$$

   Determine o gradiente da função g no ponto $(\frac{\pi}{2}, 0, 2)$, usando a regra da cadeia.

8. Considere a função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \sqrt{20 - x^2 - 7y^2}$.

   (a) Determine o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(2,1)$.

   (b) Use o plano calculado na alínea anterior para calcular um valor aproximado de $f(2.1;1)$.

9. Determine o volume do sólido limitado pelas superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = 8 - x^2 - y^2$.

10. Considere a região $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x,\ x^2 + y^2 \leq 4 \text{ e } xy \geq 0\}$. Calcule

$$\int\int_D x \, dA.$$