FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

**Análise Matemática II E**

Departamento de Matemática FCT-UNL

1º Teste (25/10/2014) - 1º Semestre - 2014/2015

1. Resolva as seguintes equações diferenciais:

   (a) $xy' - 2y = x^3 \cos x$ e $y(\frac{\pi}{2}) = 1$.

   (b) $y' = (2x + 2y + 1)^2$, fazendo a substituição $u = 2x + 2y + 1$.

2. Considere o sistema de valores iniciais $y' + (x + 2)y^2 = 0$ e $y(0) = 1$.

   (a) Pelo método de Euler calcule uma aproximação de $y(\frac{4}{10})$ com um passo $\Delta x = 0,2$.

   (b) Sem resolver a equação diferencial, determine a equação da reta tangente ao gráfico de $y$ no ponto $(1, \frac{2}{7})$.

3. Considere a região do plano $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - \sqrt{9 - x^2} < 0 \text{ e } 3 - x < y \leq \frac{\sqrt{3}}{2}x\}$.

   (a) Represente geometricamente a região $R$.

   (b) Descreva a região $R$ em coordenadas polares por meio de inequações da forma

$$\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \quad \text{e} \quad r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta).$$

4. Considere o sólido

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 < \frac{1}{3}(x^2 + y^2),\ x^2 + y^2 + z^2 < 4,\ x^2 + y^2 > 1 \text{ e } y > 0\}.$$

   (a) Descreva o sólido $S$ em coordenadas esféricas na forma

$$\rho_1(\theta, \phi) \leq \rho \leq \rho_2(\theta, \phi),\ \ \phi_1 \leq \phi \leq \phi_2 \ \text{ e } \ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2.$$

   (b) Determine as secções de $S$ pelos planos $x = 0$ e $z = 0$ e represente-as geometricamente.

   (c) Indique inequações que definam o sólido limitado pelas superfícies de equações

$$x^2 + y^2 = 1,\ \ z = -1 \ \text{ e } \ z = \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^2 + y^2}.$$

5. Considere as superfícies de equações $z = \sqrt{(x^2+y^2)}$ e $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-y)$.

   (a) Identifique as duas superfícies e represente-as geometricamente.

   (b) Seja $\mathcal{C}$ a curva resultante da interseção das duas superfícies. Suponha que $\mathcal{C}$ representa o movimento de uma partícula no espaço $\mathbb{R}^3$.

      i. Obtenha uma representação paramétrica, em função de $t$, da curva $\mathcal{C}$, orientada no sentido positivo, e tal que para $t = 0$ a partícula se encontre na posição $(0, \sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1)$.

      ii. Determine o vetor velocidade e a velocidade da partícula quando ela se encontra na posição $(-1, -1, \sqrt{2})$.

6. Considere a função $f(x, y, z)$ definida por

$$f(x,y,z) = \frac{y}{x^2+z^2} \, .$$

   (a) Apresente um esboço e descreva a superfície de nivel $f(x, y, z) = 2$. Se ela for parte de uma quádrica indique o nome dessa quádrica.

   (b) Considere a superfície de nível obtida na alínea anterior como sendo o gráfico de uma função $y = f(x, z)$. Determine as curvas de nível $f(x, z) = k$, para $k \in \{1, 4, 8\}$.