Tópicos da resolução do 2º teste AM2E (13/12/14)

1. a) O domínio de f é $\mathbb{R}^2$.

Em $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ a função f numa vizinhança do ponto (x,y) é definida pelo quociente de duas funções contínuas cujo denominador não se anula, logo f é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Em alternativa, sendo $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tem-se

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{2y^2\cos(2x^2+\pi)}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \frac{2y_0^2\cos(2x_0^2+\pi)}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} = f(x_0,y_0).$$

Vejamos a continuidade em $(0,0)$.

Temos
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2y^2\cos(2x^2+\pi)}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$
$$= \frac{0}{0}.$$

Calculemos os limites direccionais $y=mx$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx\\ x\neq 0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{2m^2x^2\cos(2x^2+\pi)}{\sqrt{x^2+m^2x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2m^2x^2\cos(2x^2+\pi)}{|x|\sqrt{1+m^2}} \underset{\substack{\downarrow\\ x^2=|x|^2}}{=} 0$$

Provemos por definição que o referido limite é zero.

Ora

$$0 \leqslant \left| f(x,y) - 0 \right| = \left| \frac{2y^2 \cos(2x^2+\pi)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| =$$

$$= \frac{2|y|^2 \left|\cos(2x^2+\pi)\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} \underset{(*)}{\leqslant} \frac{2|y|^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \underset{(**)}{\leqslant} \frac{2\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= 2\sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

(*) $\left|\cos(2x^2+\pi)\right| \leqslant 1$.

(**) $|y| \leq \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Portanto f é contínua em todo o seu domínio.

b) Calculemos as derivadas parciais de f no ponto $(0,0)$.

Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{0}{\sqrt{h^2}} = 0 \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{2h^2\cos(0+\pi)}{|h|}}{h} = \lim_{h\to 0} 2\frac{h}{|h|}\cdot(-1) =$$

$$= \begin{cases} -2 & \text{se } h\to 0^+ \\ 2 & \text{se } h\to 0^- \end{cases}$$

Portanto não existe $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ e por conseguinte também não está definido o gradiente de f em $(0,0)$.

Calculemos as derivadas parciais no ponto $(1,1)$.

Seja $(x,y) \neq (0,0)$. Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y^2\cos(2x^2+\pi)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-2y^2\cos(2x^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$= \frac{2xy^2\left(4(x^2+y^2)\operatorname{sen}(2x^2)+\cos(2x^2)\right)}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Logo $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{2\left(4 \cdot 2 \cdot \operatorname{sen}(2)+\cos(2)\right)}{2^{3/2}} = \frac{8\operatorname{sen}2+\cos 2}{\sqrt{2}}$

Por outro lado temos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y^3\cos(2x^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}} - \frac{4y\cos(2x^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Logo $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{\cos(2)}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{2}\cos(2).$

Logo $\operatorname{grad} f(1,1) = \left(\frac{8\operatorname{sen} 2+\cos 2}{\sqrt{2}}, \frac{\cos 2}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{2}\cos 2\right).$

2. Equação do plano tangente ao gráfico de f em $(3,4,5)$ é

$$z = f(3,4) + \frac{\partial f}{\partial x}(3,4)(x-3) + \frac{\partial f}{\partial y}(3,4)(y-4)$$

Ora $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2}\cdot 2x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(3,4) = \frac{3}{5}.$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-1/2} \cdot 2y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(3,4) = 4/5 .$$

Logo a equação do plano tangente é

$$z = 5 + \frac{3}{5}(x-3) + \frac{4}{5}(y-4)$$

e como um vetor normal ao plano tangente é

$\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, -1\right)$ temos que a reta normal tem

como equação vetorial

$$(x,y,z) = (3,4,5) + \lambda\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, -1\right), \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

b)

$$f(3.04, 3.98) \approx 5 + \frac{3}{5}(3.04 - 3) + \frac{4}{5}(3.98 - 4) =$$

$$= 5 + \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{100} + \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{2}{100}\right)$$

$$= 5 + \frac{12}{500} - \frac{8}{500} = 5 + \frac{4}{500} = 5 + \frac{1}{125}.$$

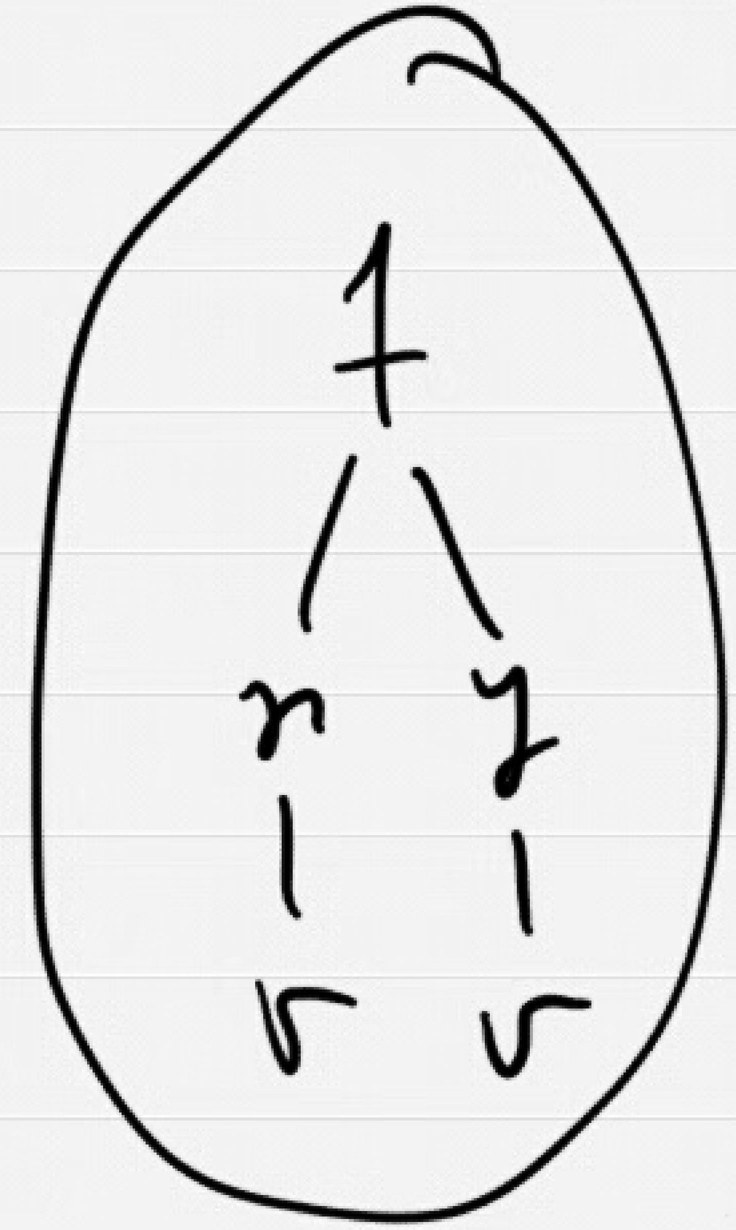
3. $$z : (u, v) \longrightarrow (\underbrace{uv}_{x}, \underbrace{u - v}_{y}) \xrightarrow{f} 8x^2y - 2x + 3y$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} =$$

$$= (16xy - 2) \cdot v + (8x^2 + 3) \cdot 1 =$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & f \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ x \arrow[d, dash] & & y \arrow[d, dash] \\ u & & u \end{tikzcd}$$

$$= 16\big(uv(u-v)\big)v + 8(uv)^2 + 3$$



e $$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$= (16xy-2)\,u + (8x^2+3)(-1)$$

logo $$\frac{\partial z}{\partial u}(1,1) = 25$$ e

$$\frac{\partial z}{\partial v}(1,1) = (16-2)1 - 11 = 2.$$

4.

Calculemos os candidatos a extremos de f nos pontos interiores do conjunto, ou seja em
$A = \{(x,y) : \frac{x^2}{4} + y^2 < 1\}$.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \boxed{(0,0)} \in A$$

Calculemos os candidatos a extremo de f nos pontos fronteiros do conjunto, ou seja em
$B = \{(x,y) : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1\}$.

Pelos multiplicadores de Lagrange temos

$$g(x,y,\lambda) = xy - \lambda\left(\frac{x^2}{4} + y^2 - 1\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - \lambda \dfrac{x}{2} = 0 \\ x - 2\lambda y = 0 \\ \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2\dfrac{y}{x} \\ \lambda = \dfrac{x}{2y} \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2y}{x} = \dfrac{x}{2y} \\ \underline{\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4y^2 \\ \underline{\qquad\qquad} \\ \underline{\qquad\qquad} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y^2 = 1 \\ \text{---} \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{1}{2} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{cases}$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

Obtemos 4 pontos:

$$\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

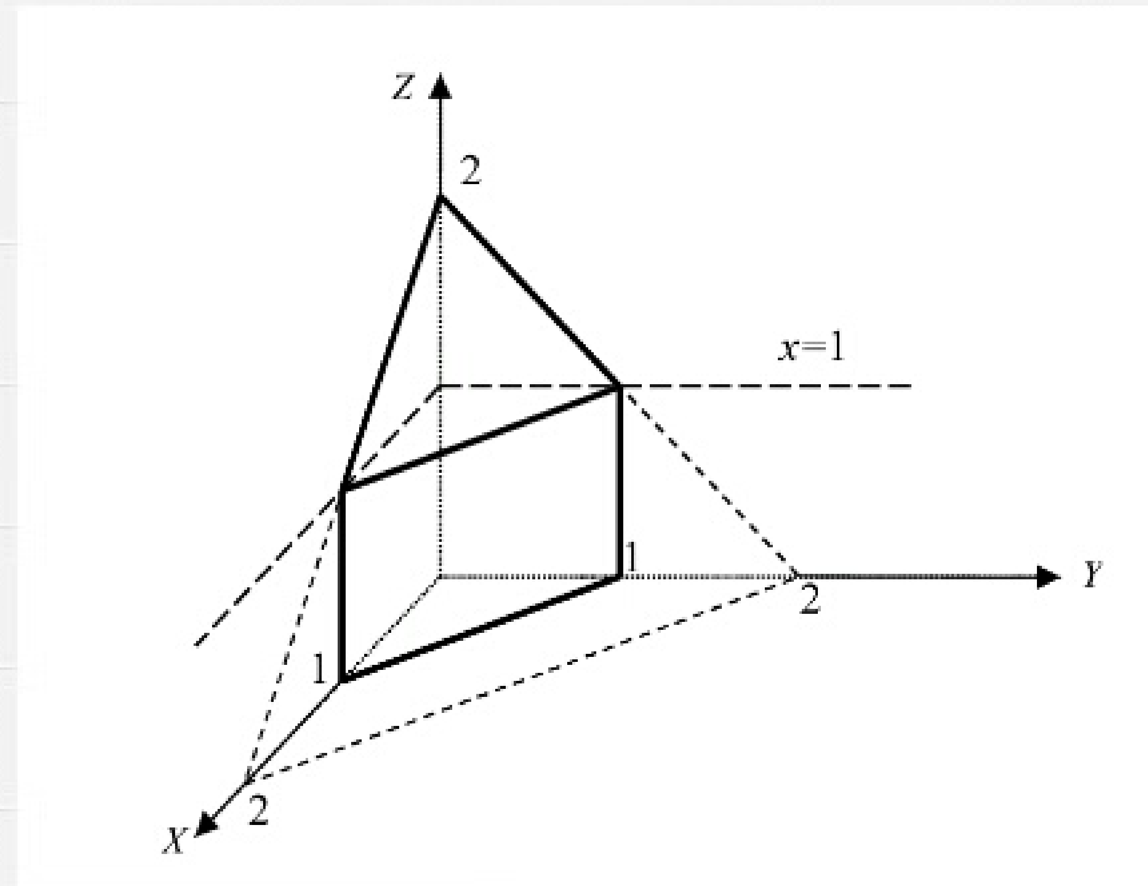
Comparando as imagens dos 5 pontos obtidos temos o máximo absoluto é $f\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$

mínimo absoluto é $f\left(-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -1$.

5.

$$V = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_1^{2-x-y} 1 \, dz \, dy \, dx$$

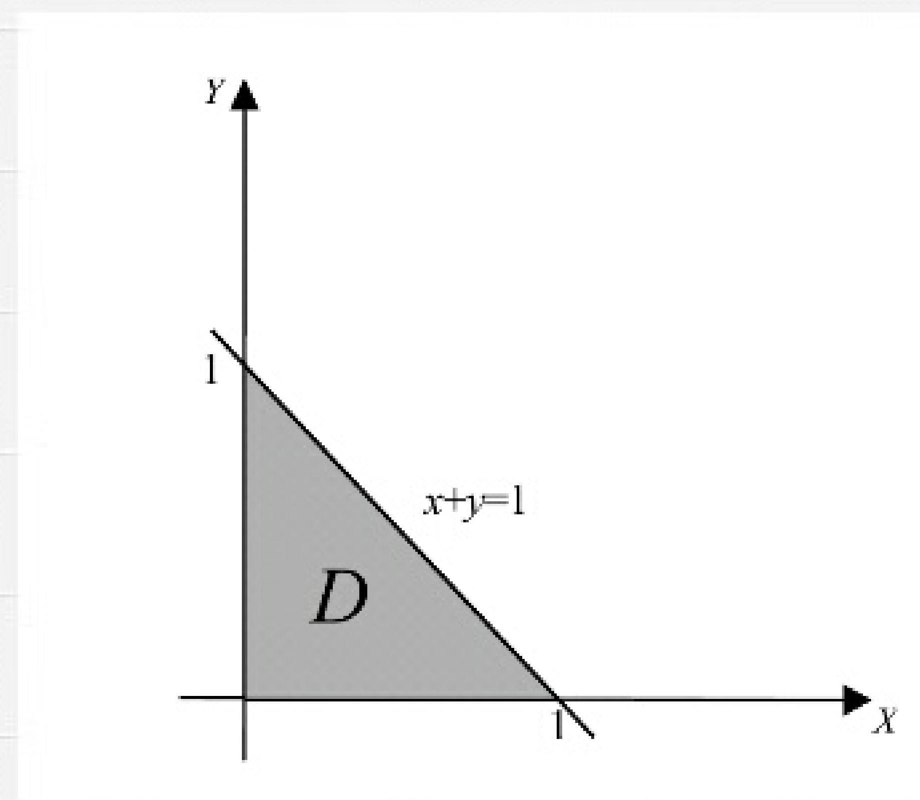
Esboço do sólido.



$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} (2-x-y-1) \, dy \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-2x+x^2) \, dx = \frac{1}{6}.$$

"sombra" do sólido no plano XOY.

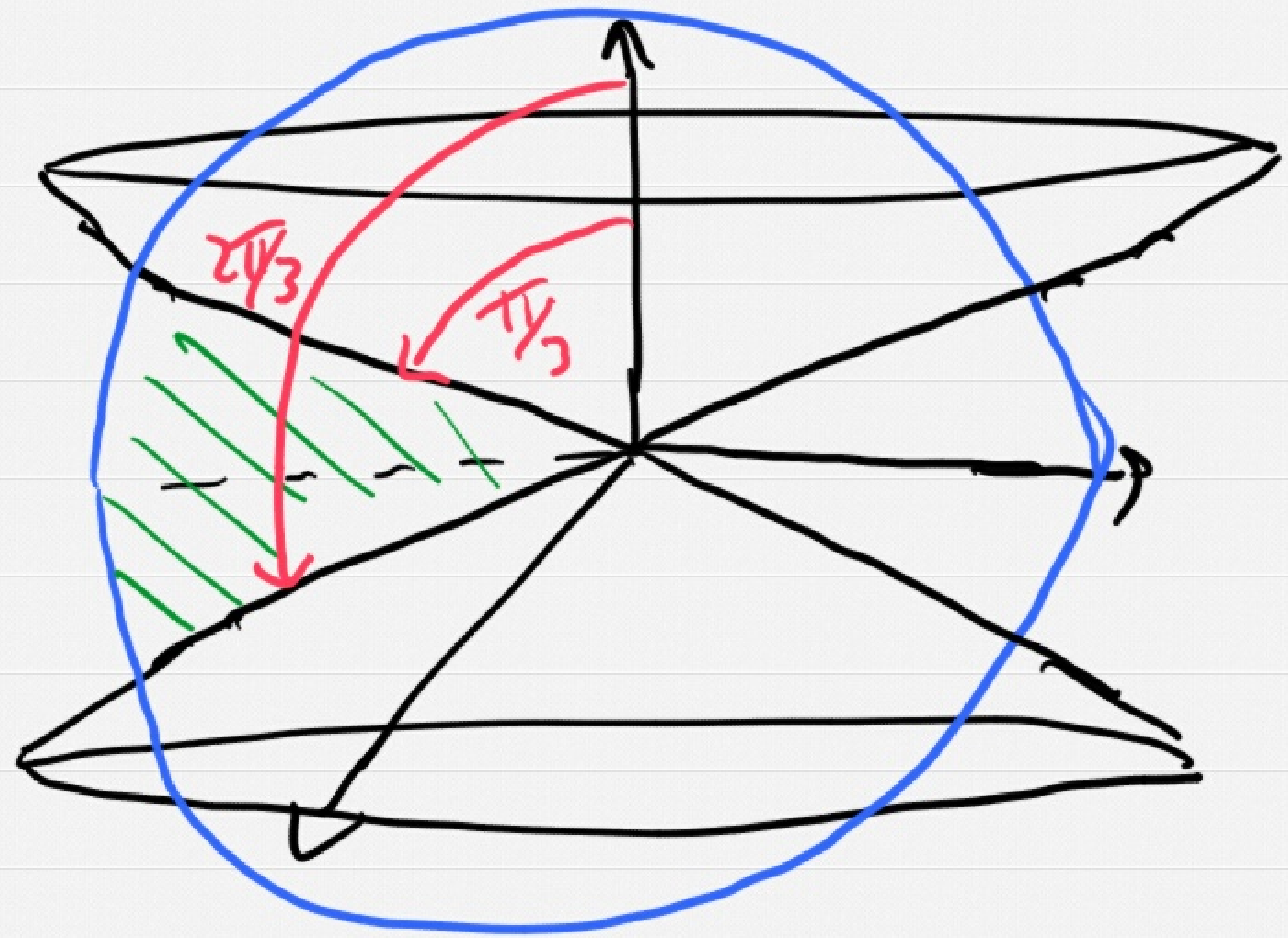


6.

$$\iiint_E \frac{z}{3}\, dV =$$

$$= \int_0^3 \int_{\pi}^{2\pi} \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{\rho^2 \sin\phi \,\rho \cos\phi}{3}\, d\phi\, d\theta\, d\rho$$

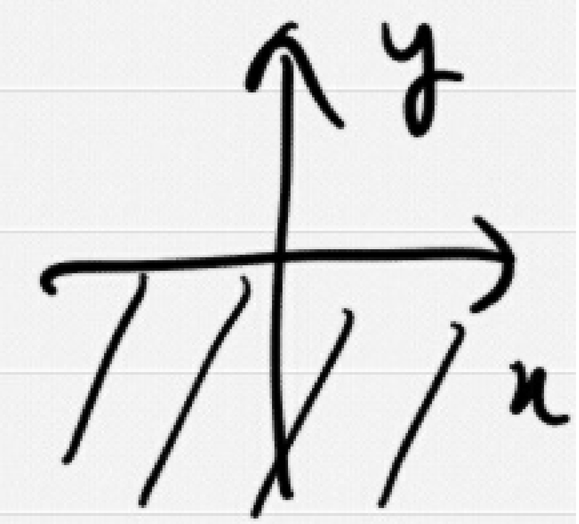
$$= \frac{1}{3}\int_0^3 \rho^3 \int_{\pi}^{2\pi} \left[\frac{\sin^2\phi}{2}\right]_{\pi/3}^{2\pi/3} d\theta\, d\rho = 0.$$



$\theta \in [\pi, 2\pi]$ $(y \leq 0)$

$\phi \in [\pi/3, 2\pi/3]$

$\rho \in [0, 3]$



1 e) f não é diferenciável no ponto $(0,0)$ dado que não existe $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.