1º Teste AM2E (22/4/15) — Uma resolução

1.

a) $xy' + (1+x)y = 2 \Leftrightarrow y' + \frac{1+x}{x}y = \frac{2}{x}$ $(x>0)$

Temos uma equação diferencial linear de 1ª ordem em y

Calculemos o fator integrante. Seja $p(x) = \frac{1+x}{x}$. Vem

$$\int \frac{1+x}{x}\,dx = \int \left(1+\frac{1}{x}\right)dx = x + \log x + K$$

Tomemos para fator integrante $\mu(x) = e^{x+\log x} = e^x \cdot x$.

Multiplicando ambos os membros da equação por $\mu(x)$ vem

$$x e^{x} y' + \left(\frac{1+x}{x}\right) x e^{x} y = \frac{2}{x} x e^{x} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$x e^{x} y' + (1+x) e^{x} y = 2 e^{x} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$\left(x e^{x} y\right)' = 2 e^{x} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$x e^{x} y = \int 2 e^{x} \, dx \quad (\Leftrightarrow)$$

$$x e^{x} y = 2 e^{x} + K \quad (K \in \mathbb{R}) \quad (\Leftrightarrow)$$

$$y = \frac{2}{x} + \frac{K}{x e^{x}} \quad (K \in \mathbb{R})$$

b) $y' = \dfrac{y - 2\sqrt{yt}}{t}$ $(t > 0)$

Fazendo a substituição $y = ut$ vem

$(ut)' = \dfrac{ut - 2\sqrt{ut^2}}{t}$ $\Leftrightarrow$ $u = u(t)$

$u't + u = \dfrac{ut - 2t\sqrt{u}}{t}$ $\Leftrightarrow$

$u't + u = u - 2\sqrt{u}$ $\Leftrightarrow$

$t \cdot \dfrac{du}{dt} = -2\sqrt{u}$ $\Leftrightarrow$

$\dfrac{du}{-2\sqrt{u}} = \dfrac{1}{t} dt$ $\Leftrightarrow$

$$\int -\frac{1}{2} u^{-1/2} \, du = \int \frac{1}{t} \, dt \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} \frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}} = \log t + k \qquad (k \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \quad -\sqrt{u} = \log t + k \qquad (k \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \quad u = (\log t + k)^2 \qquad (k \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{y}{t} = (\log t + k)^2 \qquad (k \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \quad y = t(\log t + k)^2 \qquad (k \in \mathbb{R})$$

2. $y' - 0.2xy = 0$ e $y(1) = 1$.

a) Temos $y' = \underbrace{0.2xy}_{f(x,y)}$

Queremos uma aproximação de $y(1,2)$ pelo método de Euler com $\Delta x = 0.1$.

Seja $y_{n+1} = f(x_n, y_n)$. Tem-se

n	x_n	y_n	$f(x_n,y_n)\Delta x$	y_{n+1}
0	1	1	0.02	1.02
1	1.1	1.02	0.02244	1.04244
2	1.2	1.04244		

Portanto $y(1,2) \approx 1.04244$

b) $y' = 0.2xy \quad (\Leftrightarrow)$

$$\frac{dy}{y} = 0.2x\,dx \quad (\Leftrightarrow)$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int 0.2x\,dx \quad (\Leftrightarrow)$$

$$\log y = 0.2\frac{x^2}{2} + K \qquad (K \in \mathbb{R}) \quad (\Leftrightarrow)$$

$$y = e^{0.2x^2/2 + K} \qquad (K \in \mathbb{R}) \quad (\Leftrightarrow)$$

$$y = e^{0.1x^2} \cdot e^{K} \qquad (K \in \mathbb{R}) \quad (\Leftrightarrow)$$

$$y = e^{0.1 x^2} \cdot c \qquad (c \in \mathbb{R}^+)$$

De $y(1) = 1$ vem $1 = e^{0.1} \cdot c$ ou seja $c = e^{-0.1}$

Assim a solução particular é $y = e^{x^2/2} \cdot e^{-0.1}$

Logo $y(1.2) = e^{(0.1)(1.2)^2} \cdot e^{-0.1} = e^{0,044}$

e) Erro absoluto da aproximação

$$e = \left| 1.04244 - e^{0.044} \right|$$

3.

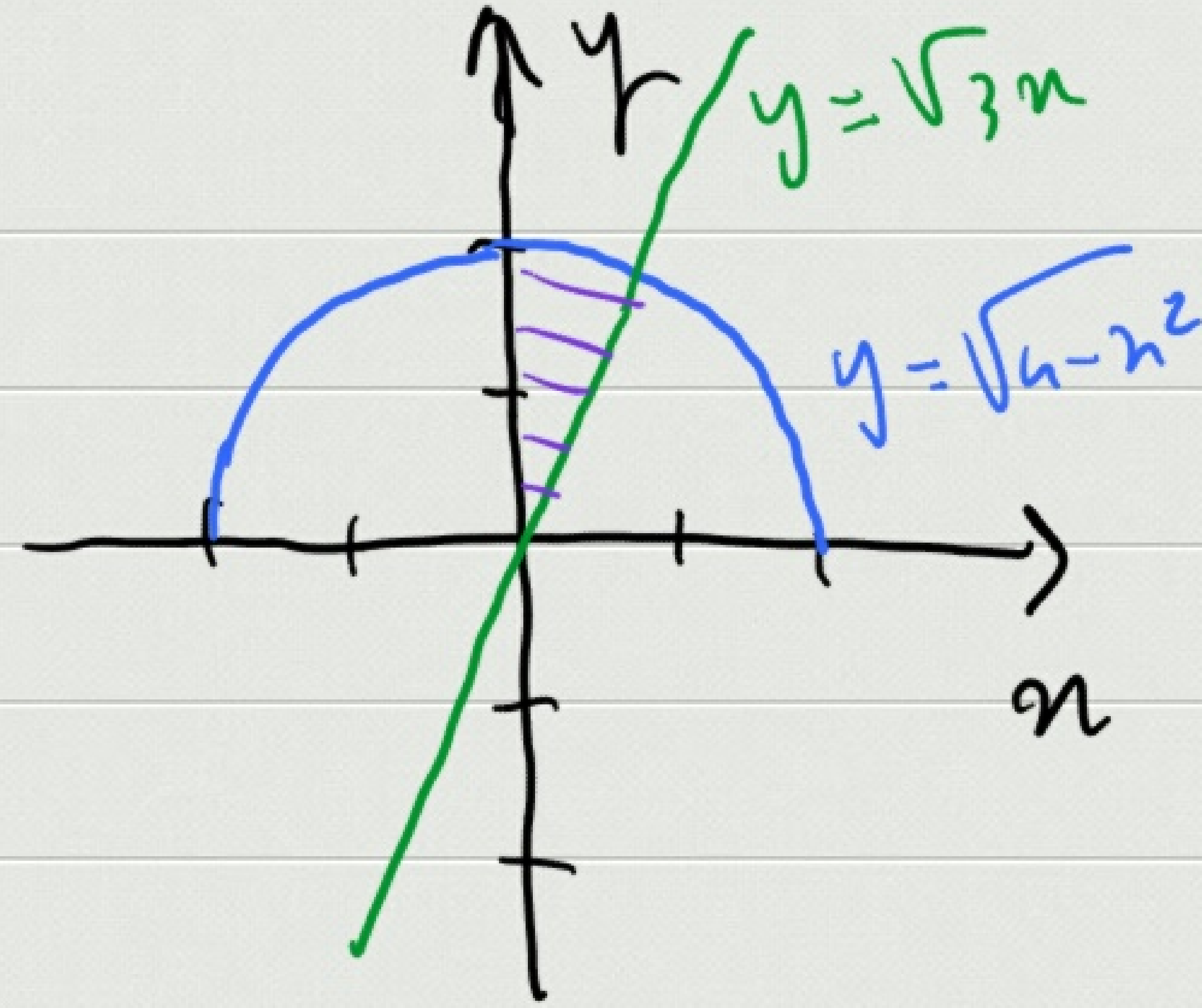
a) A região R é limitada pelas linhas

$$y = \sqrt{3}\,x \;,\; y = \sqrt{4 - x^2} \;,\; x = 0 \;\text{ e }\; y = 0 .$$

Ora $y = \sqrt{3}\,x$ é a recta que passa na origem e tem declive $\sqrt{3}$, fazendo portanto um ângulo de $\pi/3$ com o eixo XX.

De $y = \sqrt{4 - x^2}$ vem $y^2 = 4 - x^2$ e $y \geq 0$ ou seja

$x^2 + y^2 = 4$ e $y \geq 0$ (semicircunferência de raio 2 e centro $(0,0)$.



$$y \geq \sqrt{3}\, x$$

$$(0,1) \in y \geq \sqrt{3}\, x$$

pois $1 \geq \sqrt{3} \cdot 0 = 0$.

Em coordenadas polares temos

$$R = \{ (r,\theta) : r \leq 2 \text{ e } \tfrac{\pi}{3} \leq \theta \leq \tfrac{\pi}{2} \}.$$

4.

Ora $z = -x - y + 3$ é um plano

Temos $x^2 + y^2 + z^2 = 4z + 12 \Leftrightarrow$

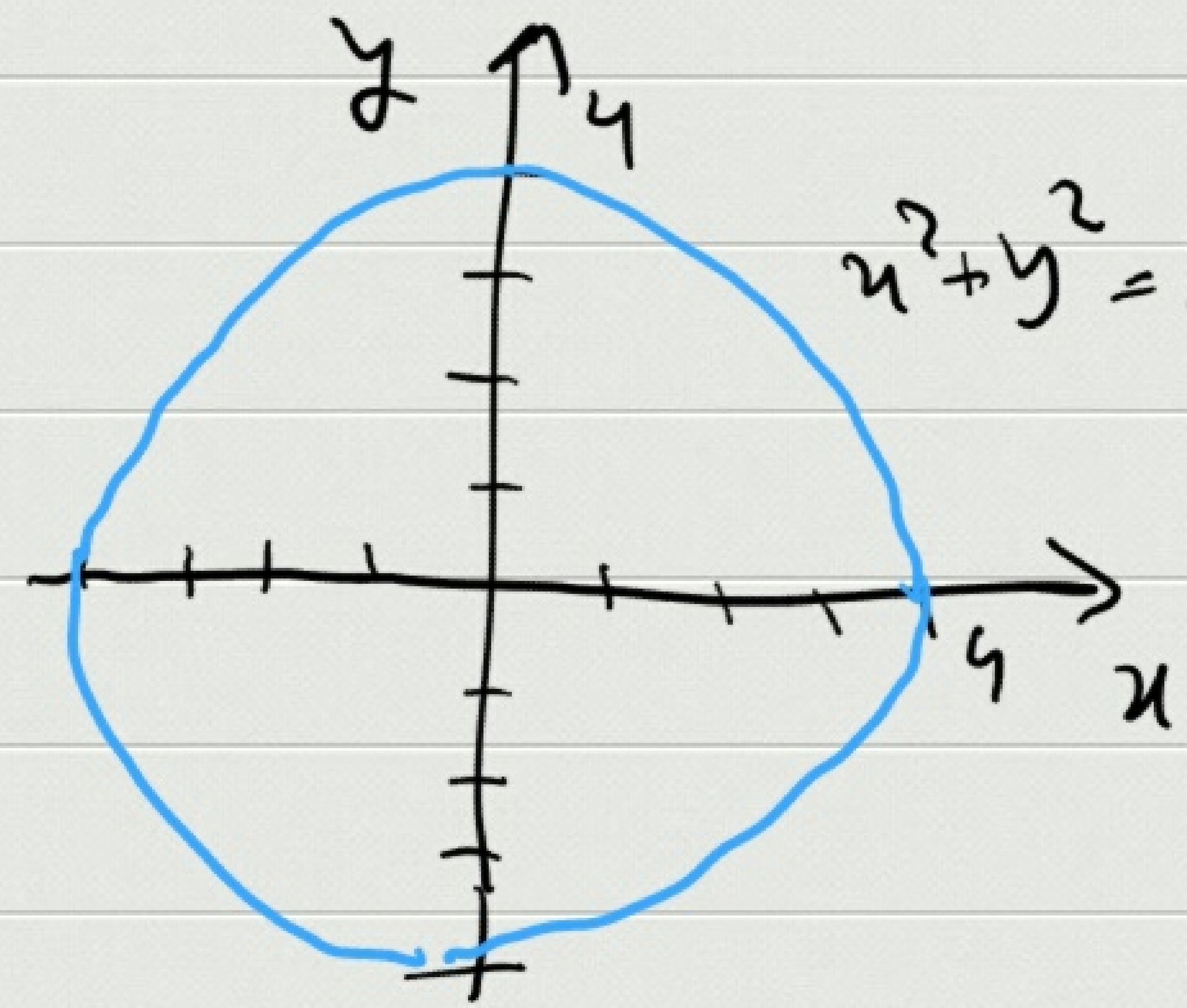
$$x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 12 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4z + 4 - 4 = 12 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 16 \rightarrow$$ superfície esférica de raio 4 e centro $(0,0,0)$.

E finalmente $\phi = 2\pi/3$ é uma superfície cónica cujo vértice é $(0,0,0)$ e os "braços" do cone formam um ângulo de $2\pi/3$ com o eixo ZZ, estando portanto voltado para baixo ($z \leq 0$).

b) $\begin{cases} x^2+y^2+(z-2)^2=16 \\ z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=16 \\ z=2 \end{cases}$



c) $z \geq -x-y+3$ dado que $\frac{7}{2} \geq 3$

logo "$\left(\frac{7}{2},0,0\right) \in z \geq -x-y+3$".

e $x^2+y^2+z^2 \leq 4z+12$, dado que $\left(\frac{7}{2}\right)^2 \leq 4 \cdot \frac{7}{2} + 12$.

Assim $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq -x-y+3 \text{ e } x^2+y^2+z^2 \leq 4z+12\}$.

d) Temos $\phi = 2\pi/3$, donde $\begin{cases} x = \rho \cos 2\pi/3 \,\text{sen}\,\theta \\ y = \rho \,\text{sen}\, 2\pi/3 \,\text{sen}\,\theta \\ z = \rho \cos 2\pi/3 \end{cases}$

Dado que $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ usando a 3^{a} igualdade

$$z = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\left(-\frac{1}{2}\right)$$ ou seja

$$z^2 = \left(x^2+y^2+z^2\right)\cdot\frac{1}{4} \quad \text{e} \quad z \leq 0$$ ou ainda

$$4z^2 = x^2+y^2+z^2 \quad \text{e} \quad z \leq 0.$$ Donde temos

$$z^2 = \frac{x^2+y^2}{3} \quad \text{e} \quad z \leq 0$$ ou seja

$$z = -\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}.$$

5. Em coordenadas cilíndricas temos

$x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$ e $z = z$. Assim de

$z \leq 4 - x^2 - y^2$ vem $z \leq 4 - r^2$

e de $x^2 + y^2 \leq 4$ vem $0 \leq r \leq 2$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Logo em coordenadas cilíndricas temos

$T = \{(r, \theta, z) : 0 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ e } -1 \leq z \leq 4 - r^2\}.$

6.

a) Temos $f(t) = (2-2\operatorname{sen} t, 2+2\cos t, 2t-1)$

Então

$$f'(t) = (-2\cos t, -2\operatorname{sen} t, 2)$$

Se $(x,y,z) = (2,4,-1)$ vem $2t-1 = -1$ donde $t=0$.

Portanto a equação da recta tangente pedida é

$(x,y,z) = (2,4,-1) + \lambda f'(0)$ ou seja

$(x,y,z) = (2,4,-1) + \lambda(-2,0,2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) A parametrização por comprimento de arco é obtida fazendo a mudança de variável

$$s = \int_0^t \| f'(t) \| \, du .$$

Temos $\displaystyle\int_0^t \| (-2\cos t, -2\operatorname{sen} t, 2) \| \, du =$

$$= \int_0^t \sqrt{4\cos^2 t + 4\operatorname{sen}^2 t + 4} \, du = \sqrt{8}\, t .$$

Então $t = s/\sqrt{8}$, e substituindo em $f(t)$ vem

$$f(s) = \left(2 - 2\sin\left(\frac{s}{\sqrt{8}}\right), 2 + 2\cos\left(\frac{s}{\sqrt{8}}\right), \frac{s}{\sqrt{8}} - 1\right).$$