2º Teste de AM2E (9/06/15) - Uma resolução

$D_f = \mathbb{R}^2$.

1. a) Comecemos por estudar a continuidade nos pontos $(a,b) \neq (0,0)$.

Temos $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} \frac{|xy|}{x^2+y^2} = \frac{|ab|}{a^2+b^2} = f(a,b)$.

Logo f é contínua em $(a,b) \neq (0,0)$.

Vejamos agora a continuidade de f em $(0,0)$.
Temos

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|}{x^2+y^2} = \frac{0}{0}.$$

Vejamos os limites direccionais da forma $y = mx$.

Então $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \dfrac{|xy|}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x\,m\,x|}{x^2+m^2x^2} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cancel{x^2}\,|m|}{\cancel{x^2}\,(1+m^2)} = \dfrac{|m|}{1+m^2}$ (depende de m)

Logo não existe limite de $f(x,y)$ no ponto $(0,0)$ e assim f não é contínua em $(0,0)$.

Concluímos que f é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

b) Calculemos as derivadas parciais de f no ponto $(0,0)$. Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{|h.0|}{h^2+0^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^3} = 0 \quad e$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)}{k} =$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{\frac{|0.k|}{0+k^2}}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{k^3} = 0.$$

Logo $\operatorname{grad} f(0,0) = (0,0)$.

c) A derivada de f segundo o vetor (a,a) no ponto $(0,0)$ é dada por

$$\lim_{t \to 0} \frac{f((0,0)+t(a,a)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(at,at)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{|at.at|}{a^2t^2+a^2t^2}}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{a^2t^2}{2a^2t^3} = \frac{1}{2} \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} = \infty$$

Logo não existe a referida derivada.

d) f não é diferenciável no ponto $(0,0)$ pois não é contínua em $(0,0)$.

2 a) Calculemos os pontos críticos de f. Temos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y + 2x = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} y \\ \text{———} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \text{———} \\ -\frac{5}{2} y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Assim a função f tem como único ponto crítico o ponto $(0,0)$.

b) Comecemos por observar que dado que A é um conjunto limitado e fechado e f é contínua em A sabemos que f tem máximo e mínimo absolutos em A, pelo teorema de Weierstrass.

Consideremos $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 9\}$ e
$A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 9\}$. Temos $A = A_1 \cup A_2$.

Dado que A_1 é um conjunto aberto sabemos que os "candidatos" a extremos absolutos de f terão que ser obtidos em pontos críticos, ou seja neste caso no ponto $(0,0)$.

Em A_2 os "candidatos" a pontos de extremo absoluto terão necessariamente de ser pontos críticos da função $F(x,y,\lambda) = 3xy + x^2+y^2 - \lambda(x^2+y^2-9)$, $\lambda \neq 0$, pelo teorema dos multiplicadores de Lagrange.

Temos então o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial h}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial h}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y + 2x + 2\lambda x = 0 \\ 3x + 2y + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3y^2 + 2yx + 2\lambda xy = 0 \\ 3x^2 + 2yx + 2\lambda xy = 0 \\ \underline{\qquad\qquad\qquad} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 \\ = \\ = \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm y \\ = \\ = \end{cases}$$

Se $x = y$, substituindo em $x^2 + y^2 = 9$ vem $x^2 = 9/2$, ou seja $x = \pm$

Donde obtemos os pontos $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$.

De $x=-y$ substituindo em $x^2+y^2=9$ vem analogamente $x=\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$, obtendo assim os pontos

$$\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right) \text{ e } \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right).$$

Comparemos agora as imagens dos 5 pontos obtidos. Temos

$$f(0,0) = 0$$

$$f\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 3\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}\frac{3}{\sqrt{2}} + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{45}{2},$$

$$f\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 3\cdot\frac{(-3)}{\sqrt{2}}\frac{(-3)}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{-3}{\sqrt{2}}\right)^2 = 45/2,$$

$$f(3/\sqrt{2}, -3/\sqrt{2}) = -9/2,$$

$$f(-3/\sqrt{2}, 3/\sqrt{2}) = -9/2.$$

Então concluímos que o máximo absoluto de f em A é $\frac{45}{2}$ e o mínimo absoluto de f em A é $-9/2$.

3.

a) Comecemos por calcular as derivadas parciais de f.

Tem-se $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sqrt{2x^2+7y^2}}{3}\right) = \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x}(2x^2+7y^2)^{1/2} =$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4x\,(2x^2+7y^2)^{-1/2} = \frac{2x}{3\sqrt{2x^2+7y^2}}$$

Donde $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{2}{9}$. Por outro lado temos

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sqrt{2x^2+7y^2}}{3}\right) = \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial y}(2x^2+7y^2)^{1/2} =$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 14y\,(2x^2+7y^2)^{-1/2} = \frac{7y}{3\sqrt{2x^2+7y^2}}.$$ Donde

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{7}{9}.$$

Assim o diferencial df no ponto $(1,1)$ é a função

$$df(1,1) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(h,k) \longmapsto \tfrac{2}{9}h + \tfrac{7}{9}k$$ ou seja

$$df(1,1)(h,k) = \tfrac{2}{9}h + \tfrac{7}{9}k.$$

Uma equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1,1,1)$ é

$$z = f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1),$$

ou seja

$$z = 1 + \tfrac{2}{9}(x-1) + \tfrac{7}{9}(y-1).$$

b) Sabemos que $f(x,y) \approx f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1)$

para (x,y) "próximos" de $(1,1)$.

Assim obtemos

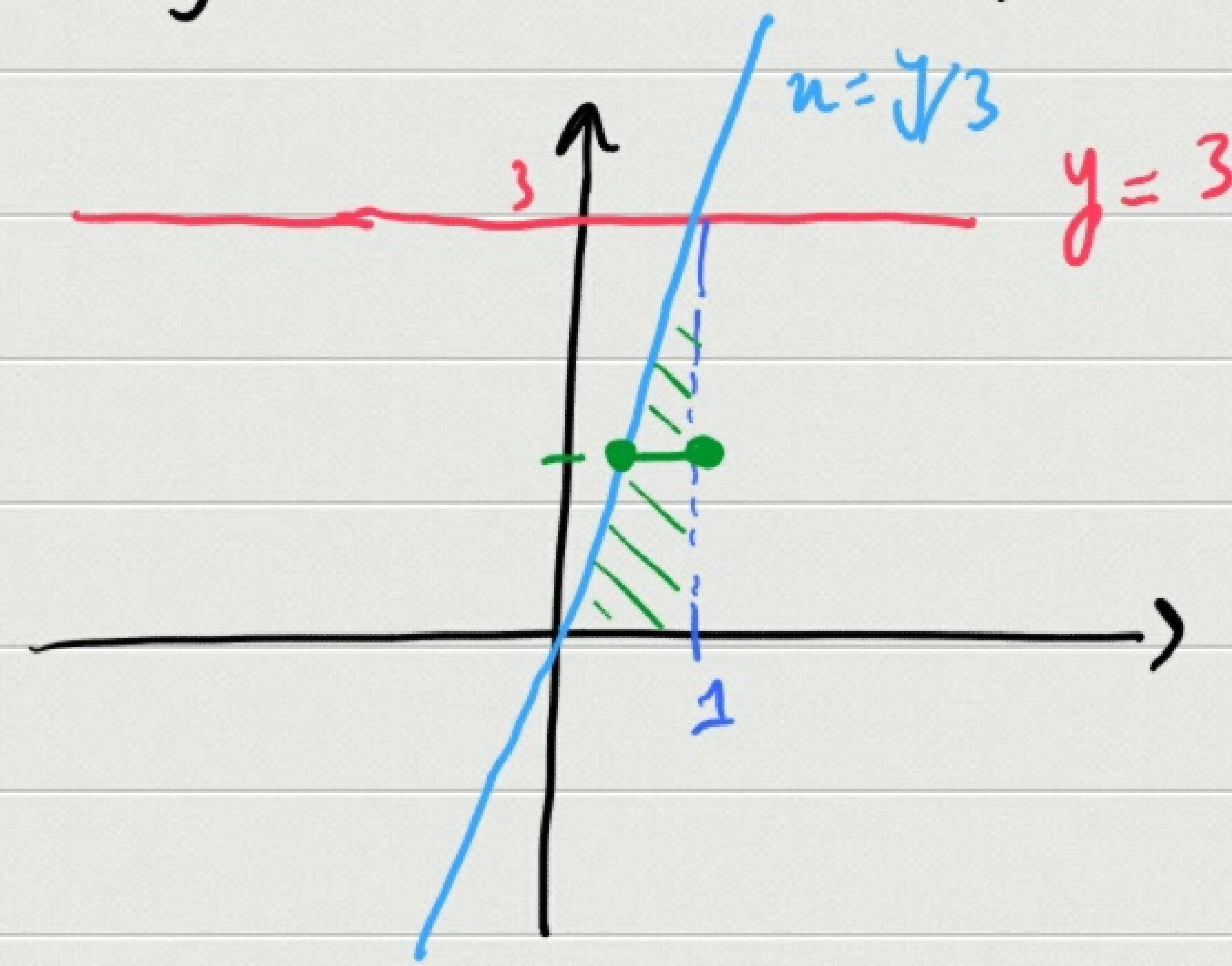
$$f(0{,}9;1{,}2) \approx 1 + \tfrac{2}{9}(-0{,}1) + \tfrac{7}{9}(0{,}2) =$$

$$= 1 + \left(\frac{2}{9}\right)\left(-\frac{1}{10}\right) + \left(\frac{7}{9}\right)\left(\frac{2}{10}\right) = 1 - \frac{2}{90} + \frac{14}{90} =$$

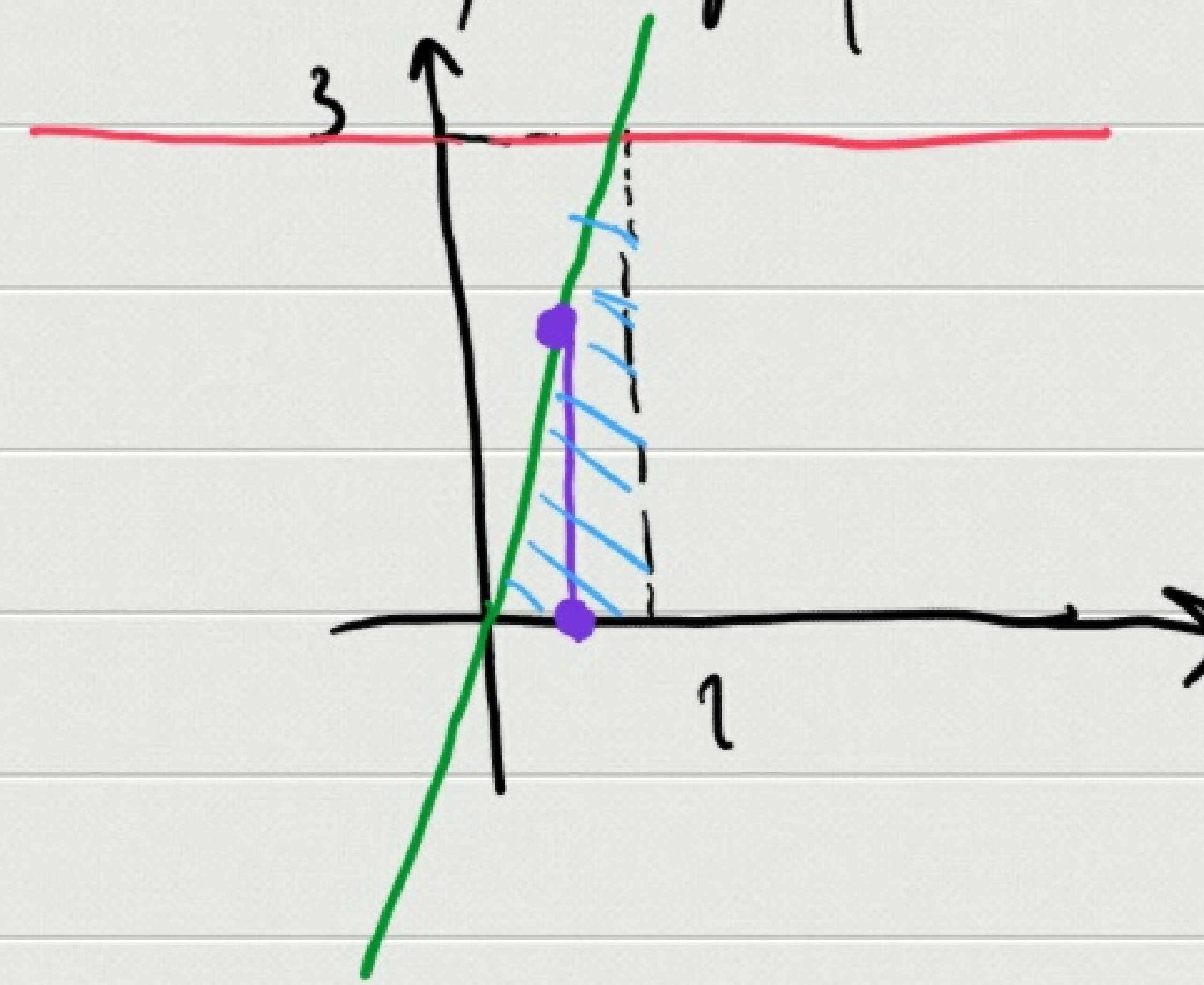
4. Tendo em conta os extremos de integração dos integrais simples conclui-se que

$$0 \le y \le 3 \quad e \quad y/3 \le x \le 1, \text{ cuja}$$

representação gráfica é



Com vista a um cálculo mais fácil na primeira integração é conveniente fazer uma inversão das integrações.



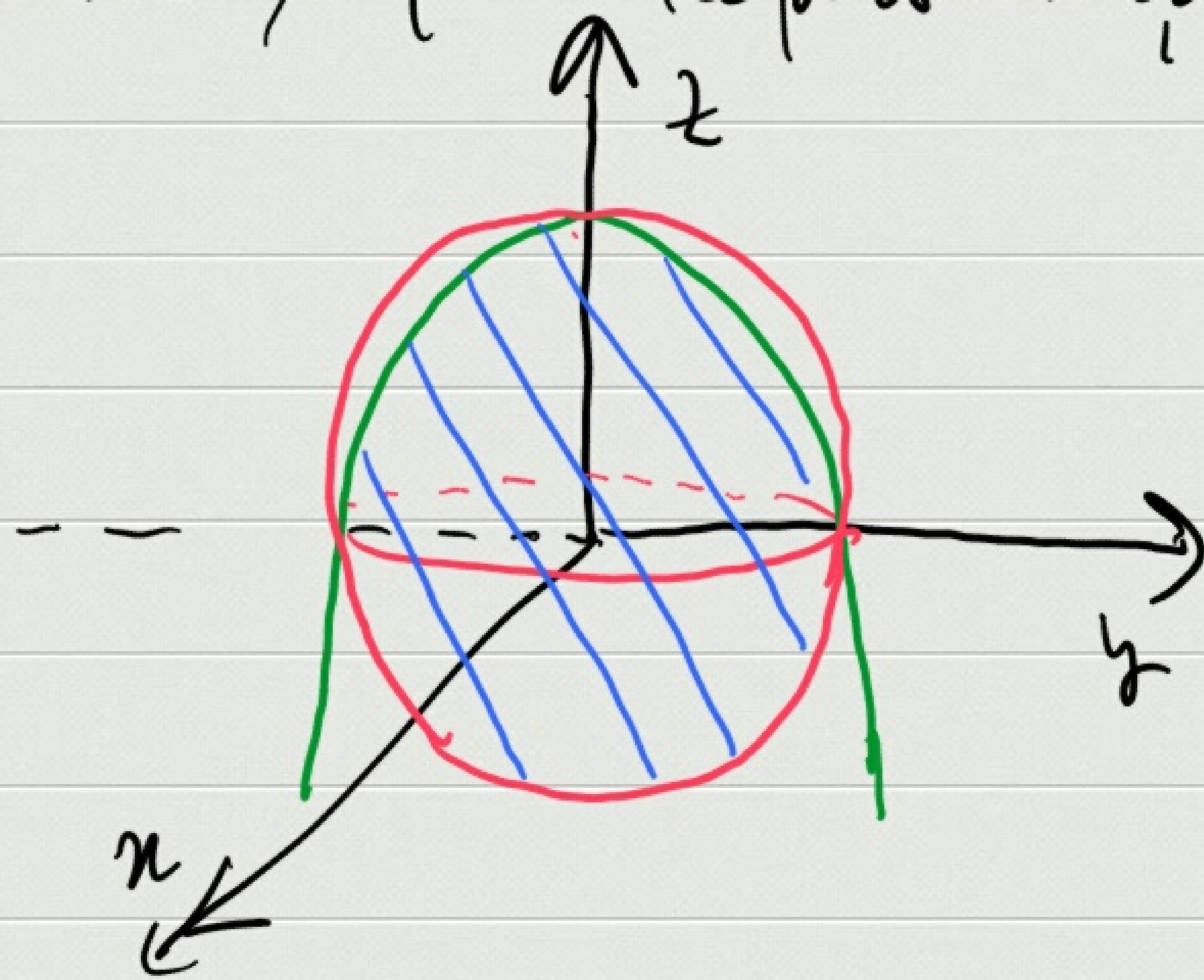
Então
$$\int_0^3 \int_{y/3}^1 (x^2+1)^3 \, dx \, dy =$$

$$= \iint_R (x^2+1)^3 \, dA =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{3x} (x^2+1)^3 \, dy \, dx = \int_0^1 3x (x^2+1)^3 \, dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^1 2x\,(x^2+1)^3\,dx = \frac{3}{2}\left[\frac{(x^2+1)^4}{4}\right]_0^1 = \frac{45}{8}.$$

5. O sólido de integração é limitado superiormente pelo parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ e inferiormente pela superfície esférica $x^2+y^2+z^2=1$ de centro $(0,0,0)$ e raio 1. A sua representação geométrica é



Para determinarmos a projecção ("sombra") do sólido no plano XOY precisamos de saber qual a intersecção das duas superfícies.

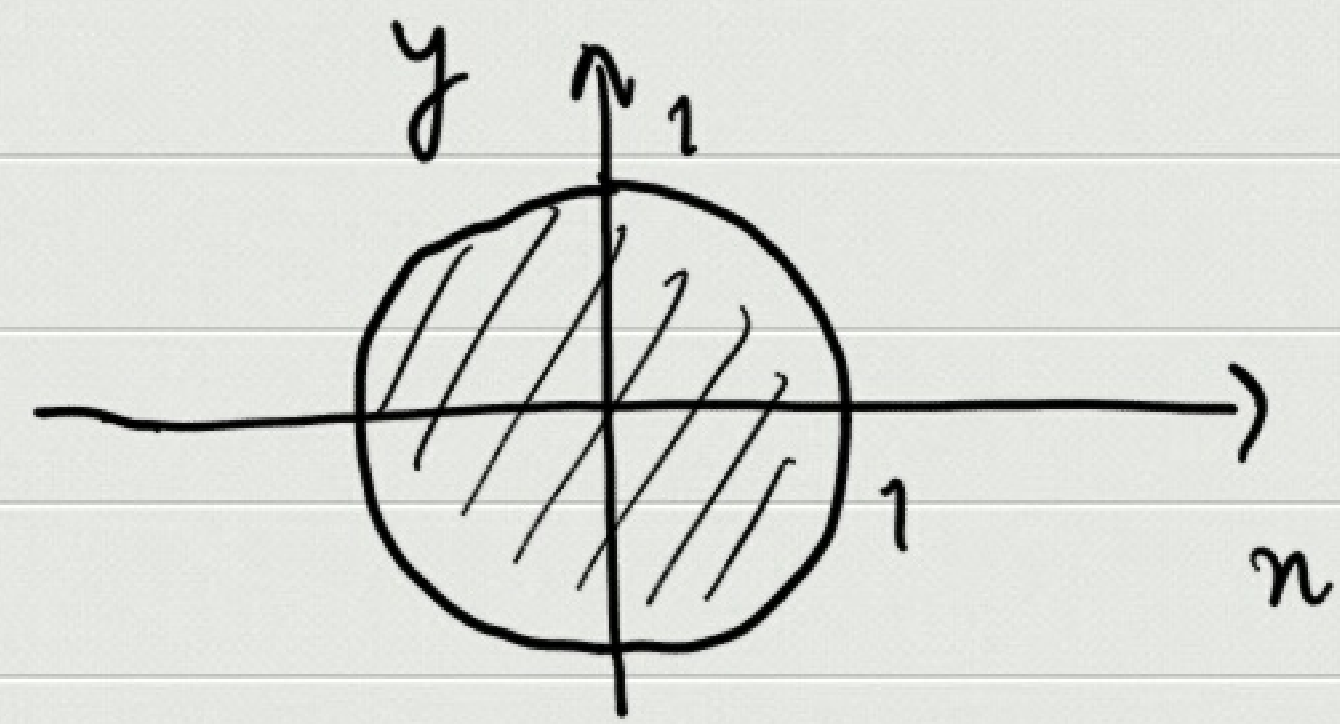
Temos

$$\begin{cases} z = 1 - x^2 - y^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - z + z^3 = 3 \\ \text{———} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \vee z = 1 \\ \text{———} \end{cases}$$

Se $z = 0$ vem $\boxed{x^2 + y^2 = 1}$

Se $z = 1$ vem $x = 0$ e $y = 0$.

Assim a sombra do sólido no plano XOY é $x^2 + y^2 \leq 1$.



Em coordenadas cilíndricas o sólido é limitado superiormente pela superfície $z = 1-r^2$ e inferiormente por $z = -\sqrt{1-r^2}$ sendo a sua sombra no plano XOY o conjunto

$$R = \{(r,\theta) : 0 \leq r \leq 1 \text{ e } 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Assim o volume do sólido é

$$V = \iiint_E (2x+y)\, dV = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{1-r^2} (2r\cos\theta + r\,\text{sen}\,\theta)\, r \, dz\, d\theta\, dr$$

$$= \int_0^1 r^2 \left[(1-r^2) + \sqrt{1-r^2}\right] \int_0^{2\pi} (2\cos\theta + \text{sen}\,\theta)\, d\theta\, dr =$$

$$= \int_0^1 r^2\left(1-r^2+\sqrt{1-r^2}\right)\left(2\underbrace{\left[\operatorname{sen}\theta\right]_0^{2\pi}}_{0} + \underbrace{\left[-\cos\theta\right]_0^{2\pi}}_{0}\right) dr$$

$$= 0$$

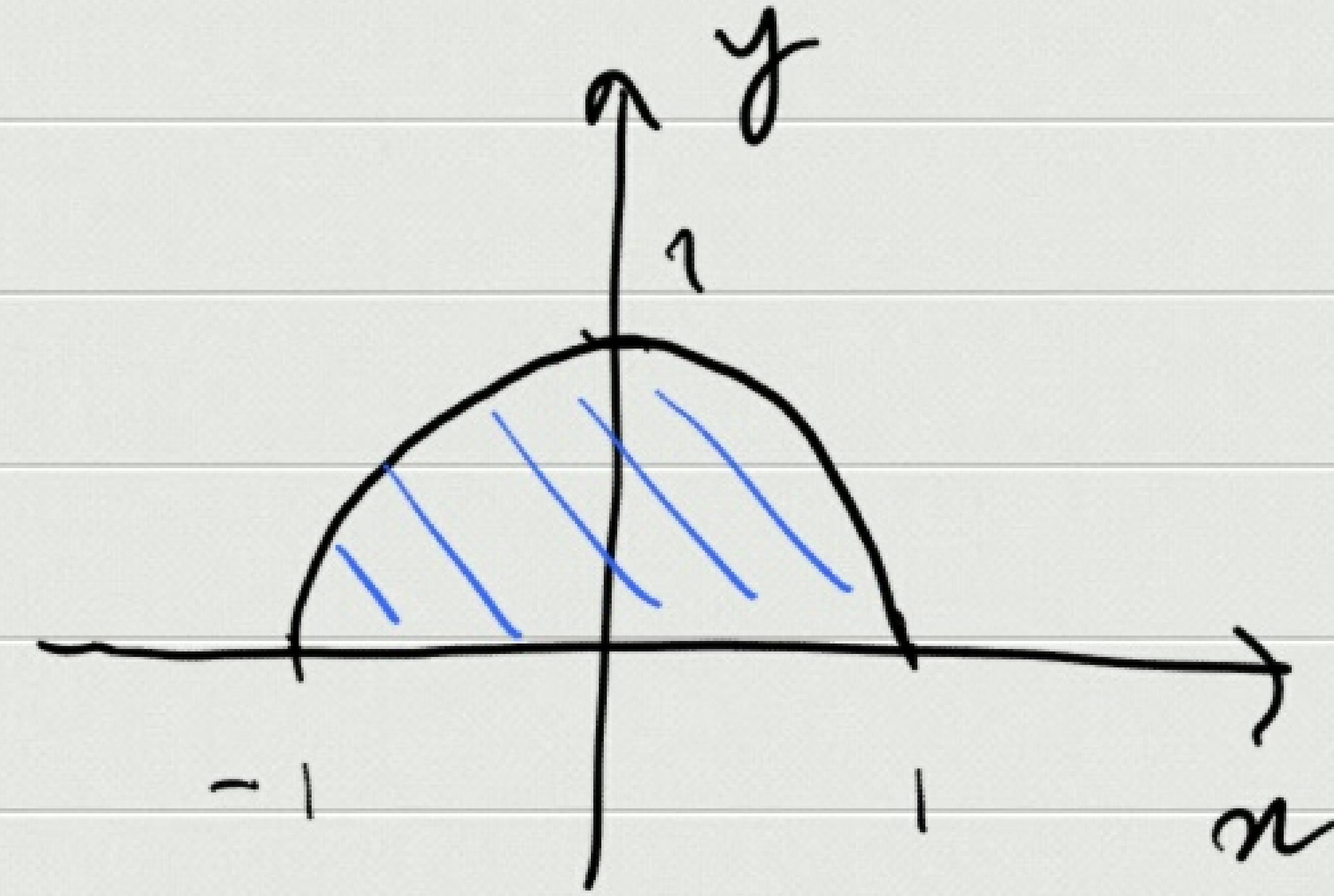
6.

Temos $0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2} \iff z \geq 0$ e $x^2+y^2+z^2 \leq 4$

$$-\sqrt{4-x^2} \leq x \leq \sqrt{4-x^2} \wedge 0 \leq y \leq 2 \iff x^2+y^2 \leq 4 \text{ e } 0 \leq y \leq 2$$

Então concluímos que o sólido é limitado superiormente pela superfície esférica $x^2+y^2+z^2=4$ e inferiormente pelo plano $z=0$, tendo como projecção ("sombra") no plano XOY

o semicírculo $x^2+y^2\le 1$ e $y\geq 0$



• Dado que $z\geq 0$ temos $\phi\in[0,\pi/2]$

• Como $x^2+y^2+z^2\le 4$ temos $\rho\in[0,2]$.

• Temos $\theta\in[0,\pi]$ pois $y\geq 0$

Portanto em coordenadas esféricas temos

$$\int_0^2\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dx\,dy = \iiint_E z^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV =$$

$$= \int_0^2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi} \rho\, \rho^2 \cos^2\phi \cdot \underbrace{\rho^2 \operatorname{sen}\phi}_{|J|}\, d\theta\, d\phi\, d\rho = \int_0^2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi} \rho^5 \cos^2\phi \operatorname{sen}\phi\, d\theta\, d\phi\, d\rho$$

$$= \pi \int_0^2 \rho^5 \int_0^{\pi} \cos^2\phi \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\rho = -\pi \int_0^2 \rho^5 \left[\frac{\cos^3\phi}{3}\right]_0^{\pi/2} d\rho =$$

$$= -\pi \int_0^2 \rho^5 \left(-\frac{1}{3}\right) d\rho = \frac{\pi}{3} \left[\frac{\rho^6}{6}\right]_0^2 = \frac{32\pi}{9}.$$