FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Análise Matemática II E

Departamento de Matemática FCT-UNL

1º Teste (28/10/2015) - 1º Semestre - 2015/2016

Duração: 2 horas

[1.5] 1. (a) Determine a solução do problema de valor inicial

$$y' + \cos(x)y = \cos(x), \quad y(0) = 2;$$

[1.0] (b) Determine a solução geral da equação diferencial $y' = x^2y^2e^{x^3}$.

2. Considere o problema de valor inicial $y' + x = y$ e $y(2) = 0$.

[1.5] (a) Utilizando o método de Euler com passo $\Delta x = 0,2$ determine um valor aproximado da solução do problema no ponto $x = 2,4$;

[1.0] (b) O problema anterior tem como solução $y = g(x)$, onde g é uma função de classe $C^\infty(\mathbb{R})$. Sem determinar $g(x)$ explicitamente, podemos afirmar que existe uma vizinhança de $x = 2$ na qual g é estritamente decrescente ?

3. Considere o sólido $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 4, \quad \text{e} \ z \leq \sqrt{3(x^2 + y^2)}\}$.

[1.5] (a) Represente em coordenadas polares a secção pelo plano $x = 0$ da superfície definida pela equação $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$;

[1.0] (b) Represente geometricamente o sólido S;

[1.5] (c) Descreva o sólido S em coordenadas esféricas por meio de inequações da forma

$$\phi_1 \leq \phi \leq \phi_2, \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \ \text{ e } \ \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2.$$

4. Considere as superfícies S_1, S_2 e S_3 definidas respetivamente por

$$z = 2 - 2x - y, \quad y = 1 - x^2 - z^2 \quad \text{e} \quad 4x^2 + 4y^2 = 1.$$

[1.5] (a) Identifique e esboce as três superfícies;

[1.0] (b) Sabendo que S_2 é o gráfico de uma função de duas variáveis $f(x, z)$ desenhe as curvas de nível $c = 0$ e $c = -1$;

[1.0] (c) Descreva a superfície S_3 em coordenadas cilíndricas.

5. Sejam $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ os gráficos das funções vetoriais definidas respetivamente por $r(t) = (t\cos(\mathrm{t}), \mathrm{t}\operatorname{sen}(\mathrm{t}), \mathrm{t})$ e $w(t) = (2\operatorname{sen}(\mathrm{t}), 1, 2\cos(\mathrm{t}))$, com $0 \leq t \leq 2\pi$.

[1.5] (a) Faça um esboço de $\mathcal{C}_2$;

[1.0] (b) Verifique que $\mathcal{C}_1$ está contida numa superfície cónica ;

[1.0] (c) Determine uma representação cartesiana da reta tangente à curva $\mathcal{C}_1$ no ponto $(0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

[2.0] 6. Represente em coordenadas cartesianas a região do plano descrita em coordenadas polares por

$$R = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}_0^+ \times [0, 2\pi[: 1 \leq r \leq 2 \;\text{ e }\; \theta \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}] \cup [\pi, \frac{7\pi}{6}]\}.$$

7. Determine, caso existam, os seguinte limites. Justfique.

[1.0] (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^6}$;

[1.0] (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,3)} \frac{x^2\operatorname{sen}(y-3)}{x^2 + (y-3)^2}$.