Análise Matemática II E

Departamento de Matemática FCT-UNL

2º Teste (16/12/2015) - 1º Semestre - 2015/2016

Duração: 2 horas

1. Considere a função definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^3+y^3} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a) Determine o gradiente da função f em $(0,0)$.

   (b) Determine a derivada direccional de f em $(0,0)$ no sentido do vector $u = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. O que pode concluir sobre a diferenciabilidade de f em $(0,0)$?

   (c) Determine uma equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto de coordenadas $(1,1,0)$.

2. (a) Esboçe a região de integração e troque a ordem de integração do integral seguinte:

$$\int_0^1 \int_0^{2-x^3} f(x,y)\, dydx.$$

   (b) Utilizando coordenadas cilíndricas, calcule o volume do sólido limitado inferiormente pela superfície esférica $x^2+y^2+z^2=1$ e limitado superiormente pela superfície cónica $z = 1-\sqrt{x^2+y^2}$.

3. Seja $f = f(x,y)$ uma função real de duas variáveis de classe C^1 e admita que a variável z se obtém através da identidade $z = f(st^2+2, te^s-2)$, a partir das variáveis s e t.

   (a) Determine $\frac{\partial z}{\partial s}$ e $\frac{\partial z}{\partial t}$ em função das derivadas parciais de f.

   (b) Sabendo que $\frac{\partial f}{\partial x}(2,0) = 10$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(2,0) = -5$, calcule $\frac{\partial z}{\partial s}(0,2)$.

4. Considere a função real de duas variáveis $f(x,y) = xy$. Determine:

   (a) os extremos relativos da função f;

   (b) o máximo e o mínimo absolutos da função f no conjunto limitado pelo triângulo de vértices $(1,0)$, $(0,1)$ e $(0,0)$, caso existam. Justifique.

5. Usando uma mudança de variáveis conveniente calcule $\int\int_R e^{xy} dA$, onde R é a região limitada pelas curvas $y = x,\ y = \frac{1}{2}x,\ y = \frac{2}{x}$ e $y = \frac{1}{x}$.