2º Teste de AM2E (16-12-15) - Uma resolução.

1. a) Calculemos as derivadas parciais de f no ponto $(0,0)$. Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h.0(h^2-0^2)}{h^3+0^3}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^4} = 0 \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{0.k(0^2-k^2)}{0^3+k^3}}{k} =$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{0}{k^4} = 0.$$

Assim $\text{grad} f(0,0) = (0,0)$,

b) Temos sendo $u = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$,

$$D_{\vec{u}} f(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f\left((0,0) + t\vec{u}\right) - f(0,0)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f\left((0,0) + t\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2} t \, \frac{1}{2} t \left(\frac{3}{4} t^2 - \frac{1}{4} t^2\right)}{\frac{3}{4} t^3 + \frac{1}{4} t^3}}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} t^2 \, \frac{1}{2} t^2}{t^4} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Se f fosse diferenciável em $(0,0)$ então teríamos

$$D_{\vec{u}} f(0,0) = \text{grad} f(0,0) \cdot \vec{u} = (0,0) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = 0$$

o que não acontece visto que como calculámos atrás temos $D_{\vec{u}} f(0,0) = \sqrt{3}/8$.

Logo concluímos que f não é diferenciável em $(0,0)$.

c) Calculemos em primeiro lugar as derivadas parciais de f num ponto genérico $(x,y) \neq (0,0)$. Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\left(y(x^2-y^2)+2x.xy\right)(x^2+y^2) - 2x\left(xy(x^2-y^2)\right)}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\left(x(x^2-y^2)-2y.xy\right)(x^2+y^2) - 2y\left(xy(x^2-y^2)\right)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Assim no ponto $(1,1)$ vem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 1 \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -1.$$

Por conseguinte uma equação do plano pedido é

$$z = f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1)$$

ou seja

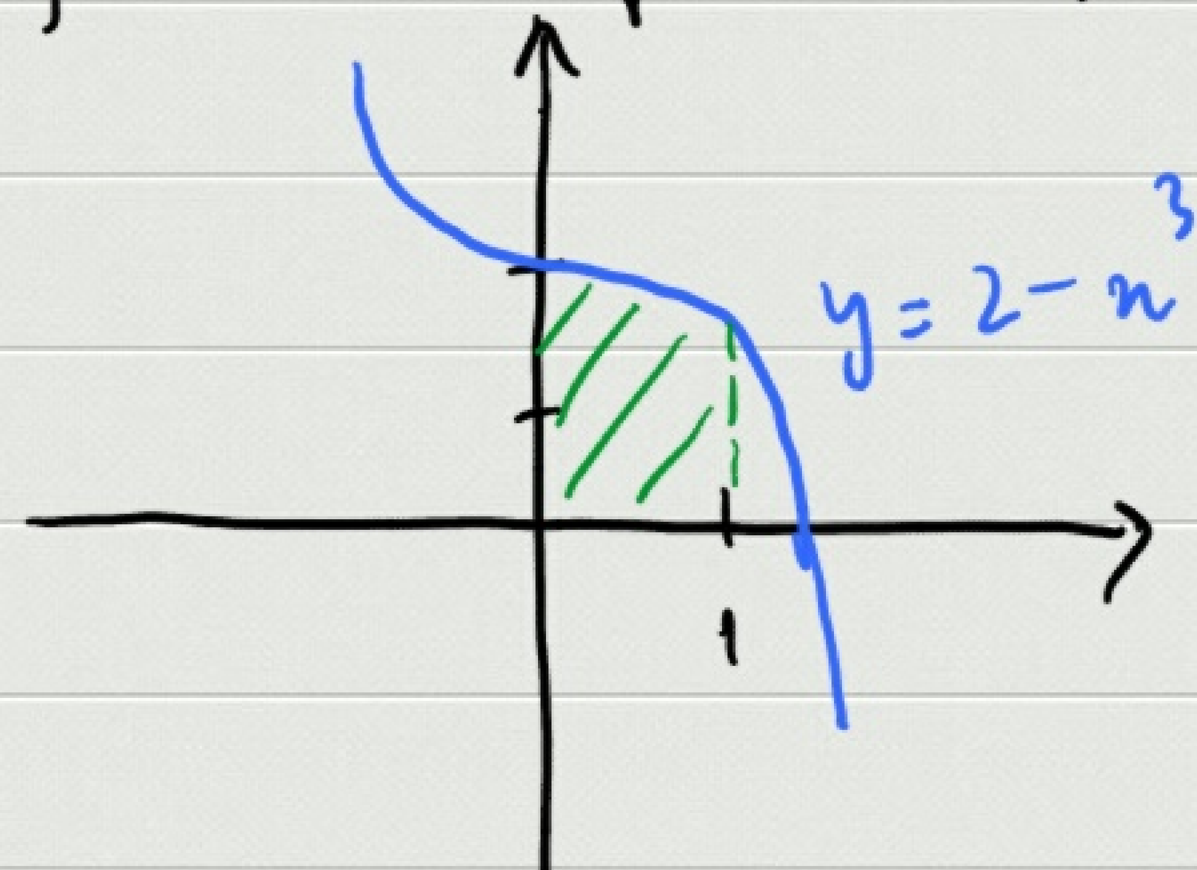
$$z = x - y.$$

2. a) Temos $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 2 - x^3$.

Para determinar um esboço da região precisamos de saber desenhar as linhas $x=0$, $x=1$, $y=0$ e $y=2-x^3$.

Note-se que a curva $y = 2 - x^3$ intersecta o eixo dos xx no ponto $(\sqrt[3]{2}, 0)$, o eixo dos yy em $(0,2)$, é estritamente decrescente e tem a concavidade voltada para cima em $]-\infty, 0[$ e voltada para baixo em $]0, +\infty[$.

Como esboço da região de integração temos



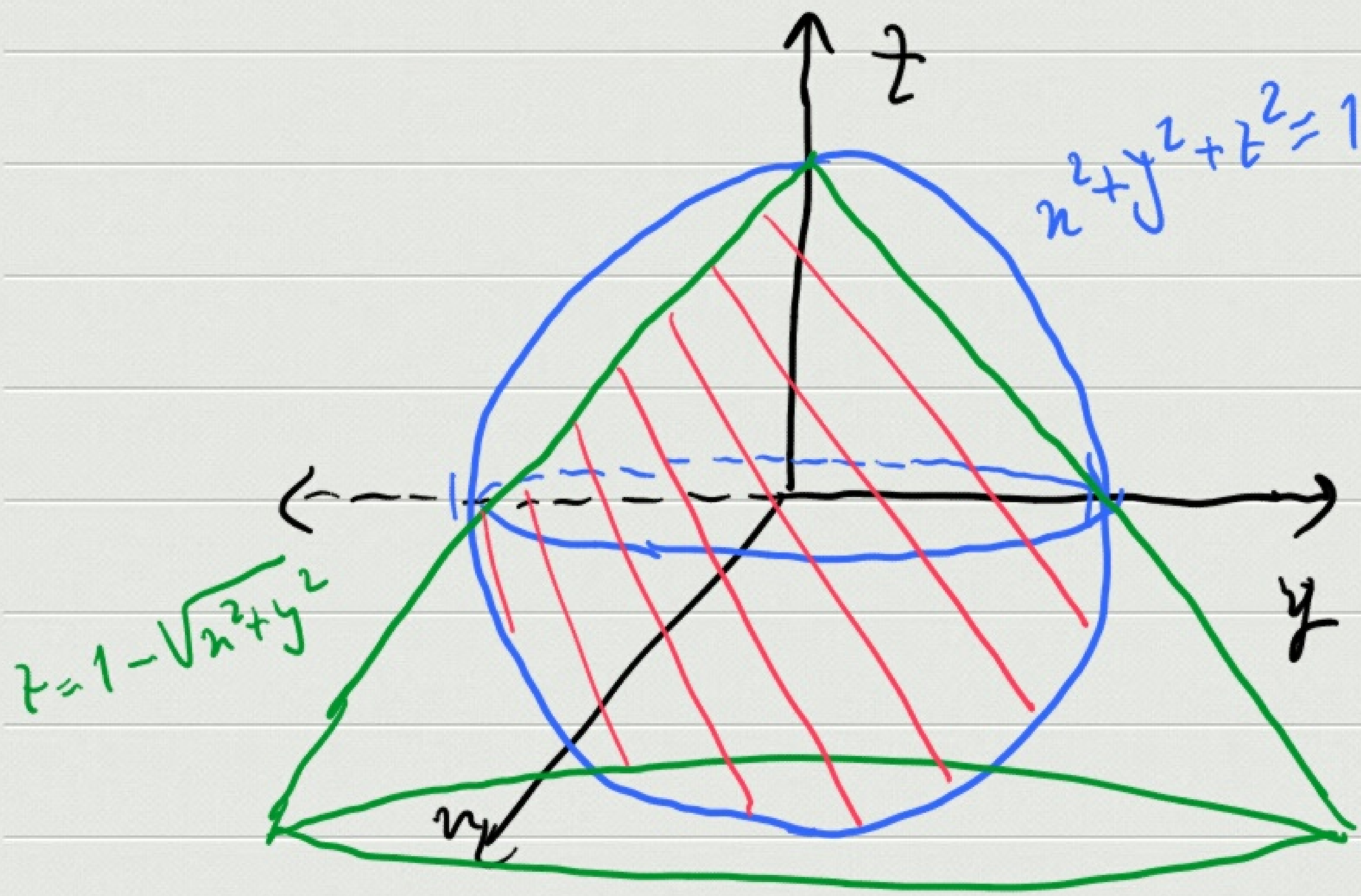
Então temos se $0 \leq y \leq 1$ então $0 \leq x \leq 1$ e

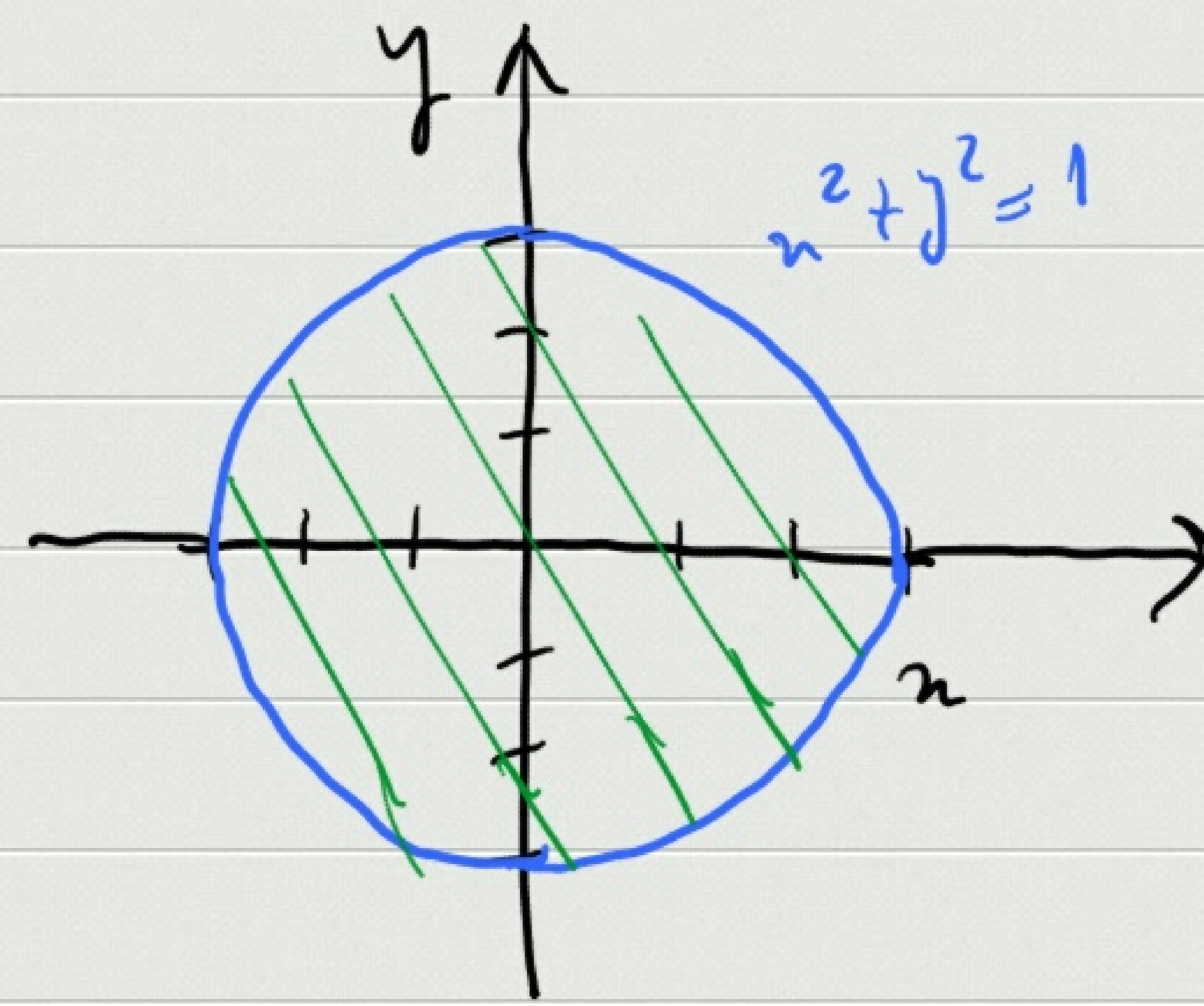
se $0 \leq y \leq 1$ então $0 \leq x \leq \sqrt[3]{2-y}$.

Donde obtemos os integrais

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy + \int_1^2 \int_0^{\sqrt[3]{2-y}} f(x,y)\,dx\,dy.$$

b) Com o esboço do sólido e sua projeção em XOY temos





Note que a superfície cónica está ao longo do eixo dos ZZ, intersecta o eixo dos ZZ em $(0,0,1)$ e intersecta a superfície cónica nos pontos $(x,y,0)$ em que $x^2+y^2=1$.

Então o referido volume calculado em coordenadas cilíndricas é

$$V(E)=\iiint_E 1\,dV=\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_{-\sqrt{1-r}}^{1-r} r\,dz\,dr\,d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{1} r\left(1-r+\sqrt{1-r^2}\right)dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{1} r-r^2+r\left(1-r^2\right)^{1/2}\,dr\,d\theta$$

$$= 2\pi \left(\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\left[\frac{(1-r^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 \right)$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = \pi.$$

3 a) Pela regra da cadeia temos

$$\frac{\partial z}{\partial s}(s,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \cdot \frac{\partial x}{\partial s}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \cdot \frac{\partial y}{\partial s}(s,t)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \cdot t^2 + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \cdot te^s$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial t}(s,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \cdot \frac{\partial x}{\partial t}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \cdot \frac{\partial y}{\partial t}(s,t)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \cdot 2st + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \cdot e^{s}.$$

b) Pela alínea a) temos

$$\frac{\partial z}{\partial s}(2,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,2) \cdot 2st\Big|_{(2,0)} + \frac{\partial f}{\partial y}(0,2) \cdot e^{s}\Big|_{(2,0)}$$

$$= 10 \cdot 0 - 5 \cdot e^{2} = -5e^{2}.$$

4.

a) Calculemos os pontos críticos de f.

Temos o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0. \end{cases}$$

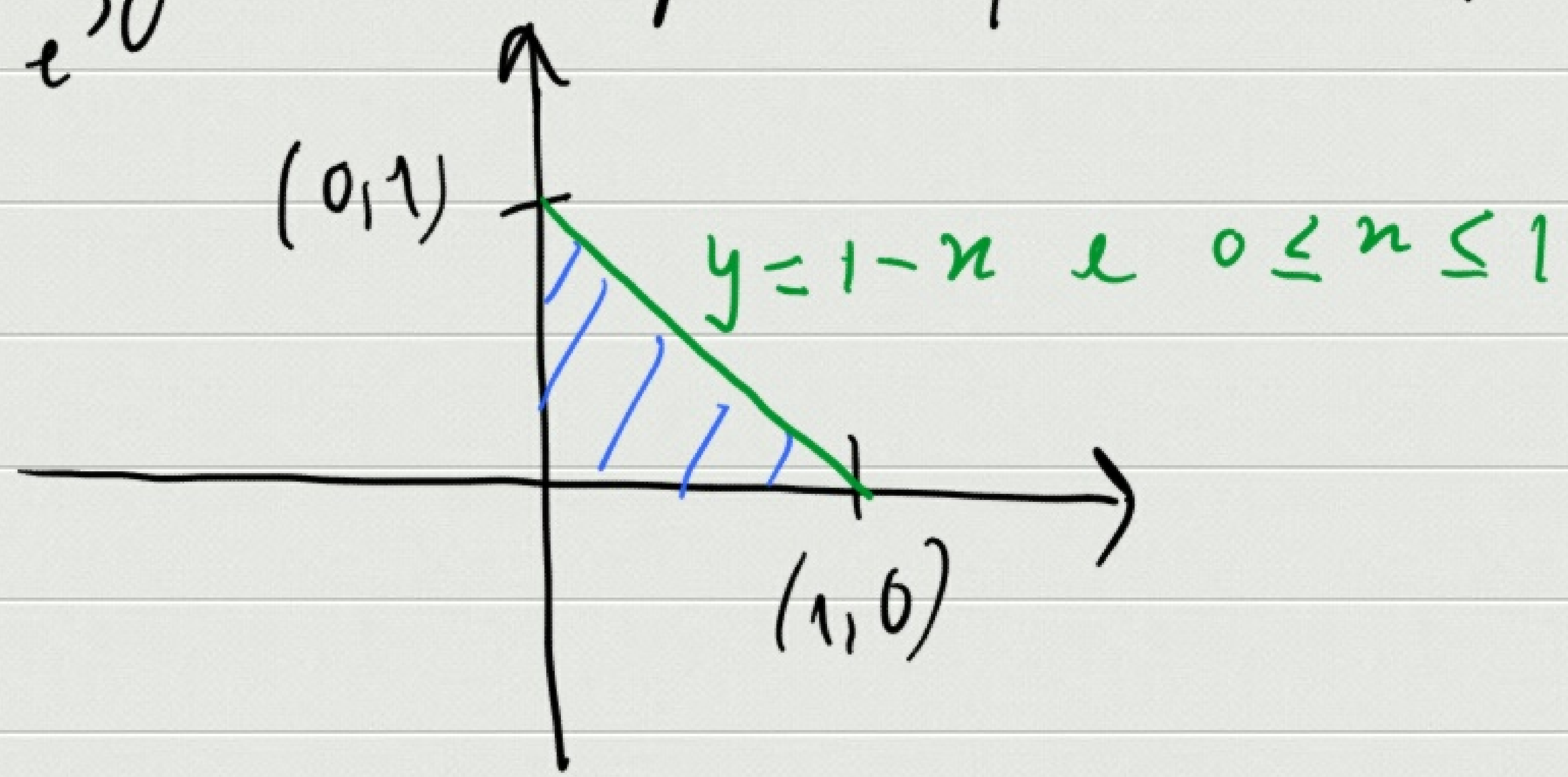
Assim o único ponto crítico de f é $(0,0)$.

Temos $\underbrace{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}}_{r} = \underbrace{\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}}_{t} = 0$ e $\underbrace{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)}_{s} = 1$.

Donde $rt - s^2 = -1 < 0$.

Portanto o ponto $(0,0)$ é um ponto de sela e por conseguinte a função f não tem extremos relativos.

b) Queremos o máximo e o mínimo absolutos de f no conjunto cuja representação geométrica é



Dado que o conjunto referido é um conjunto limitado e fechado e f é uma função contínua nesse conjunto podemos pelo teorema de Weierstrass que f tem máximo e mínimo nesse conjunto.

Calculemos os candidatos a pontos de extremo no interior do conjunto. São os pontos críticos de f que pertencem ao interior do conjunto.

Na alínea a) vimos que não há pontos nessas condições.

Vejamos agora na fronteira do conjunto;

ou seja nos lados do triângulo.

Se $0 \leq y \leq 1$ e $x = 0$ temos $f(0,y) = 0$.

Se $0 \leq x \leq 1$ e $y = 0$ temos $f(x,0) = 0$.

Se $0 \leq x \leq 1$ e $y = 1-x$ temos

$$f(x, 1-x) = x(1-x) = x - x^2.$$

Ora a função real $f(x) = x - x^2$ tem como derivada $f'(x) = 1 - 2x$ e $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Assim os pontos candidatos a poderemos obter extremo são $(0,0)$ e $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

Como $f(0,0)=0$ e $f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$

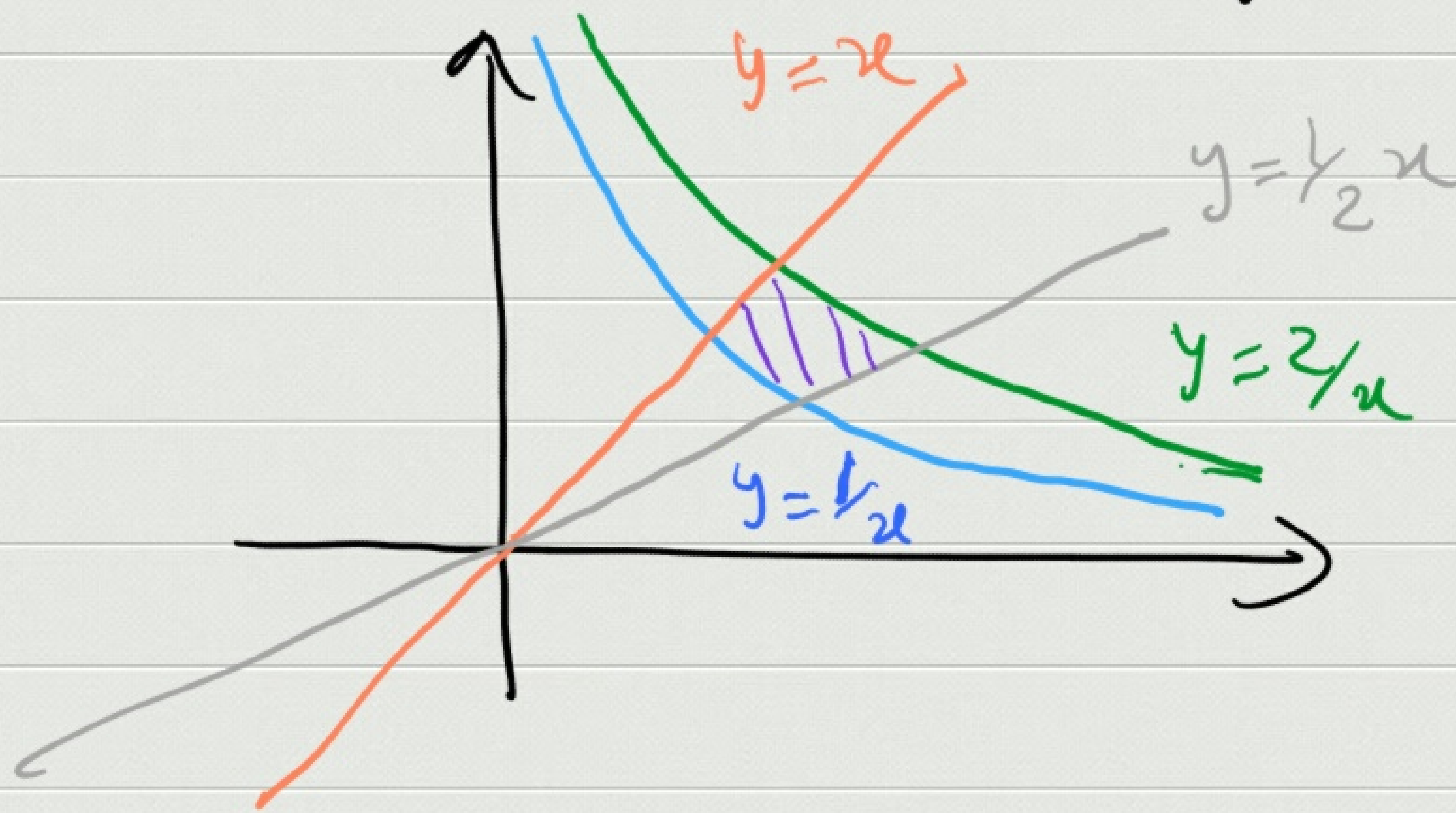
concluímos que 0 é o mínimo absoluto

e $\frac{1}{4}$ é o máximo absoluto.

NOTA: Em alternativa para obter os pontos candidatos a extremo no lado $y=1-x$ e $0\leq x\leq 1$ poderíamos ter determinado os pontos críticos de

$L(x,y,\lambda)=xy-\lambda(x+y-1)$.

5. Como região de integração temos



Ora $y = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow \boxed{y/x = \frac{1}{2}}$ e $y = x \Leftrightarrow \boxed{y/x = 1}$

Por outro lado $y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow xy = 1$ e $y = \frac{2}{x} \Leftrightarrow xy = 2$

Consideremos a mudança de variáveis $u = y/x$ e $v = xy$.

O jacobiano da mudança de variáveis é

$$|J| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2u}\sqrt{v/u} & \frac{1}{2\sqrt{uv}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{v/u} & \frac{1}{2}\sqrt{u/v} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2u} \quad \text{sendo} \quad \begin{cases} x = \sqrt{v/u} \\ y = \sqrt{uv} \end{cases}$$

Por conseguinte temos

$$\iint_R e^{xy}\, dA = \iint_S e^{v} \left|-\frac{1}{2u}\right| dA = \frac{1}{2}\int_{1/2}^{1}\int_{1}^{2} e^{v} \cdot \frac{1}{2u}\, dv\, du$$

$= \frac{1}{2}(e^2 - e)\log 2,$

onde S é o transformado de R pela mudança de variáveis considerada.