FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Análise Matemática II E

Departamento de Matemática FCT-UNL

Recurso (24/06/2016) - 2º Semestre - 2015/2016

1ª Parte

1. Resolva as equações diferenciais:
   (a) $y' + \frac{y}{2} = 2 + x$ com a condição inicial $y(0) = 0$;
   (b) $2y(x+1)y' = x$.

2. Use a substituição $y = u^3$ para resolver a equação $y' = 3y + \sqrt[3]{y^2}$.

3. Considere as superfícies S_1, S_2 e S_3 definidas respetivamente pelas equações
$$9 - x^2 + \frac{y^2}{3} - z^2 = 0, \quad y - x^2 + 1 = z^2 \quad \text{e} \quad z^2 - \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 0.$$
   (a) Identifique e faça um esboço das três superfícies.
   (b) Identifique a secção $y = 0$ da superfície S_1 e a secção $z = 0$ da superfície S_3, e esboce-as.
   (c) Escreva uma equação que defina a superfície S_2 em coordenadas cilíndricas.

4. Determine:
   (a) o sólido $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x \leq 0 \ \wedge \ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq 0 \ \wedge \ 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\}$, em coordenadas esféricas.
   (b) o sólido limitado pelas superfícies de equação $x^2 + y^2 = 9, \ z = x^2 + y^2$ e $z = 0$ em coordenadas cilíndricas.

5. Utilize uma aproximação linear para obter um valor aproximado de $f(-0.02, -0.03)$ sendo
$$f(x,y) = e^x \cos(x + 3y) + \log(1 + xy^2).$$

6. Suponha que a curva $\mathcal{C}$ definida pela função vectorial $r(t) = (e^t, \cos(\pi e^t), \mathrm{sen}(\pi e^t))$, com $t \in [0, 10]$ representa a trajectória de um móvel em função do tempo t.
   (a) o vector deslocamento, a velocidade e o vector velocidade no instante $t = 5$;
   (b) verifique se o ponto $(0, -1, \pi)$ pertence à recta tangente à curva no ponto $(1, -1, 0)$;
   (c) determine uma outra parametrização da curva atrás referida em função da variável s, com $s \in [0, 40]$.

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Análise Matemática II E

Departamento de Matemática FCT-UNL

Recurso (24/06/2016) - 2º Semestre - 2015/2016

2ª Parte

7. Considere a função definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x^2 y)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a) Estude a continuidade de f no ponto $(0,0)$;

   (b) Calcule, caso existam, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ e a derivada de f no ponto $(0,0)$ segundo o vector $(1,1)$.

   (c) Diga, justificando, se f é diferenciável no ponto $(0,0)$.

8. Usando um integral duplo calcule a área entre as curvas $x = y^2$ e $x = 2 - y^2$.

9. Considere o sólido $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z < 2 \ \wedge \ z > x \ \wedge \ x > 0 \ \wedge \ y > 0\}$. Calcule o volume de A.

10. Usando coordenadas esféricas calcule $\int\int\int_B z \ dV$, onde B é o sólido limitado pela superfície esférica $x^2+y^2+z^2 = 2$, pela superfície cónica $z = -\sqrt{x^2+y^2}$ e pelo plano $z = 0$.

11. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto $(0,0,0)$, com matriz Jacobiana nesse ponto $Df(0,0,0) = [2 \ 3 \ 4]$ e tal que $f(0,0,0)$=0. Sendo $G : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$G(x,y,z) = f(f(x,y,z), x+y+z, xyz),$$

calcule $\frac{\partial G}{\partial x}(0,0,0)$.

12. Inverta a ordem de integração e calcule $\int_0^1 \int_{y^2}^1 \sqrt{x} e^{x^2} \ dx \ dy$.

13. Estude quanto à existência de extremos a função $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = x+y$ em que $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+2z^2 = 8\}$.