1º Teste AM2E (20/04/2016) - Uma resolução

1 a) Temos uma equação diferencial linear de 1ª ordem,

$$xy' = x^2 + 5xy \underset{x \neq 0}{\Leftrightarrow} y' = x + 5y \Leftrightarrow y' - 5y = x.$$

Consideremos $G(x) = \int -5\,dx = -5x$ e para factor integrante

$$\mu = e^{G(x)} = e^{-5x}.$$

Multiplicando ambos os membros da equação por μ vem

$$e^{-5x} y' - 5y e^{-5x} = x e^{-5x} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{-5x} y\right)' = x e^{-5x} \Leftrightarrow e^{-5x} y = \int x e^{-x} \, dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-5x} y = -\frac{1}{5} \int \underbrace{x}_{v} \underbrace{(-5) e^{-5x}}_{u'} \, dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-5x} y = -\frac{1}{5} \left(x e^{-5x} - \int e^{-5x} \, dx \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-5x} y = -\frac{1}{5} \left(x e^{-5x} + \frac{1}{5} e^{-5x} \right) + k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{5} x - \frac{1}{25} + k e^{5x} \quad (k \in \mathbb{R})$$

b) Resolvendo por variáveis separáveis vem,

$$\frac{y'}{x^2} = \frac{x}{y} \Leftrightarrow y\,dy = x^3\,dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int y\,dy = \int x^3\,dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^4}{4} + K \quad (K \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{x^4}{2} + K} \quad (K \in \mathbb{R})$$

Para x tais que $\frac{x^4}{2} + K > 0$.

2. a) Usemos o método de Euler com um passo de $\Delta x = 0{,}1$, $(x_0, y_0) = (0, 1)$ e $f(x_n, y_n) = 1 + 2x_n$.

Obtemos então a seguinte tabela:

x_n	y_n	$f(x_n, y_n)\Delta x$	y_{n+1}
0	1	$1 \cdot (0{,}1) = 0{,}1$	1,1
0.1	1,1	$(1{,}2)(0{,}1) = 0{,}12$	1,22
0.2	1,22	$(1{,}4)(0{,}1) = 0{,}14$	1,36
0.3	1,36	—	—

$f(x_0, y_0) = 1 + 2 \cdot 0 = 1$

$f(x_1, y_1) = 1 + 2(0{,}1) = 1{,}2$

$f(x_2, y_2) = 1 + 2 \cdot (0{,}2) = 1{,}4$

Assim $y(0{,}3) \approx y_3 = 1{,}36$.

b) Substituindo $y = x^2 + x + 1$ na equação vem

$$(x^2+x+1)' - 2x = 2x + 1 - 2x \text{ e } y(0) = 1.$$

Assim concluímos que $y = x^2 + x + 1$ é solução da equação diferencial de valor inicial $y(0) = 1$.

e) Usando a alínea anterior temos que

$$y(0{,}3) = (0{,}3)^2 + 0{,}3 + 1 = 1{,}39.$$

Portanto o erro da referida aproximação é

$$y(0{,}3) - y_3 = 1{,}39 - 1{,}36 = 0{,}03 \quad \text{(por defeito)}.$$

3 a) Relativamente à superfície S_1 temos:

$$5x^2 + 4y^2 - 8y + 4 = z^2 \Leftrightarrow 5x^2 + 4(y^2 - 2y + 1) = z^2$$

$$5x^2 + 4(y-1)^2 = z^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} + \frac{(y-1)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = z^2$$

Temos um cone duplo.

A superfície S_2 é definida por uma equação do tipo $Ax + By + Cz = D$, com $A = 1$, $B = 0$, $C = 1$ e $D = 4$. Trata-se pois de um plano.

Quanto à superfície S_3 temos:

$$4y^2+8y+x^2-4z^2=0 \Leftrightarrow 4(y^2+2y+1)-4+x^2-4z^2=0$$

$$\Leftrightarrow 4(y+1)^2+x^2-4z^2=4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2^2}+(y+1)^2-z^2=1$$

Temos um hiperbolóide de 1 folha paralelo ao eixo zz.

b) Com vista à parametrização resultante da intersecção de S_1 e S_2 consideramos o sistema

$$\begin{cases} 5x^2+4y^2-8y+4=z^2 \\ x+z=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ z=4-x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 5x^2+4y^2-8y+4=(4-x)^2 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2+4y^2-8y+4=16-8x+x^2 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2+8x+4y^2-8y=12 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x^2+2x+1)+4(y^2-2y+1)=20 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+1)^2+(y-1)^2=5 \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{x+1}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(\frac{y-1}{\sqrt{5}}\right)^2=1 \\ z=4-x \end{cases} \Leftrightarrow$$

Usando a fórmula fundamental da trigonometria temos

$$\frac{x+1}{\sqrt{5}} = \cos t \quad e \quad \frac{y-1}{\sqrt{5}} = \operatorname{sen} t \text{, ou seja}$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{5}\cos t - 1 \\ y = \sqrt{5}\operatorname{sen} t + 1 \\ z = 3 - \sqrt{5}\cos t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

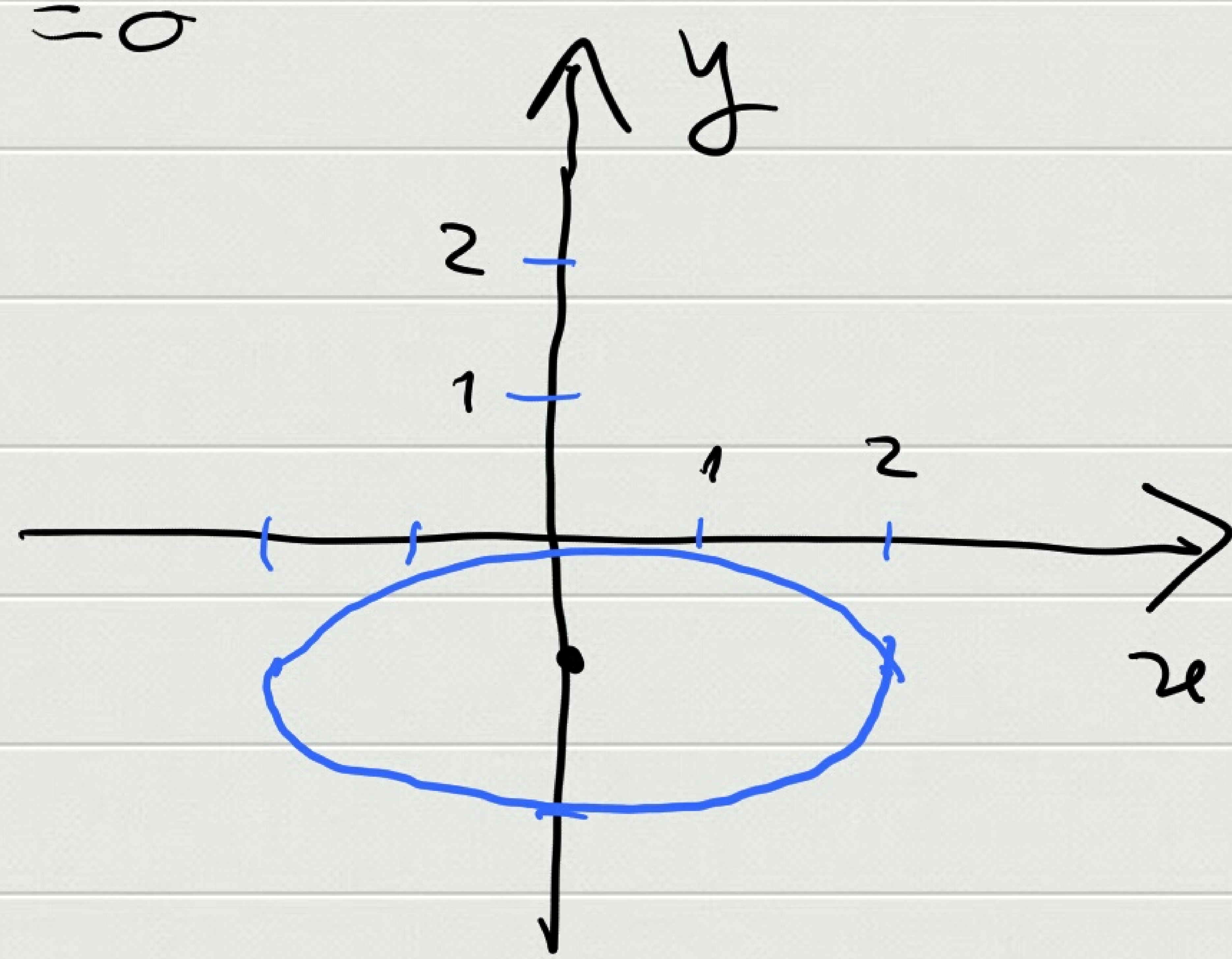
c) Intersectando a superfície S_3 pelo plano $z=0$ obtemos

$$\begin{cases} 4y^2 + 8y + x^2 - 4z^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2 + 8y + x^2 = 0 \\ \text{———} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4(y^2+2y+1)-4+x^2=0 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4(y+1)^2=4 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2^2}+(y+1)^2=1 \\ z=0 \end{cases}$$

Trata-se de uma elipse ao longo do eixo XX c/ $a=2$ e $b=1$. e centro $(0,-1)$.



4. a) Convertendo para coordenadas cilíndricas

- $x^2+y^2 \leq 4$
  é dado por $r \leq 2$
- $x \geq 0$ é $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$
- $-1 \leq z \leq x^2+y^2$ é $-1 \leq z \leq r^2$

Assim em coordenadas cilíndricas

$$E_1 = \{ (r, \theta, z) \in \mathbb{R}_0^+ \times [0, 2\pi[\times \mathbb{R} : r \leq 2, \ \theta \in [0, \tfrac{\pi}{2}] \cup [\tfrac{3\pi}{2}, 2\pi[\ \text{e} \ -1 \leq z \leq r^2 \}.$$

b) Convertendo para coordenadas esféricas temos

$$4 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 9 \iff 2 \leq \rho \leq 3$$

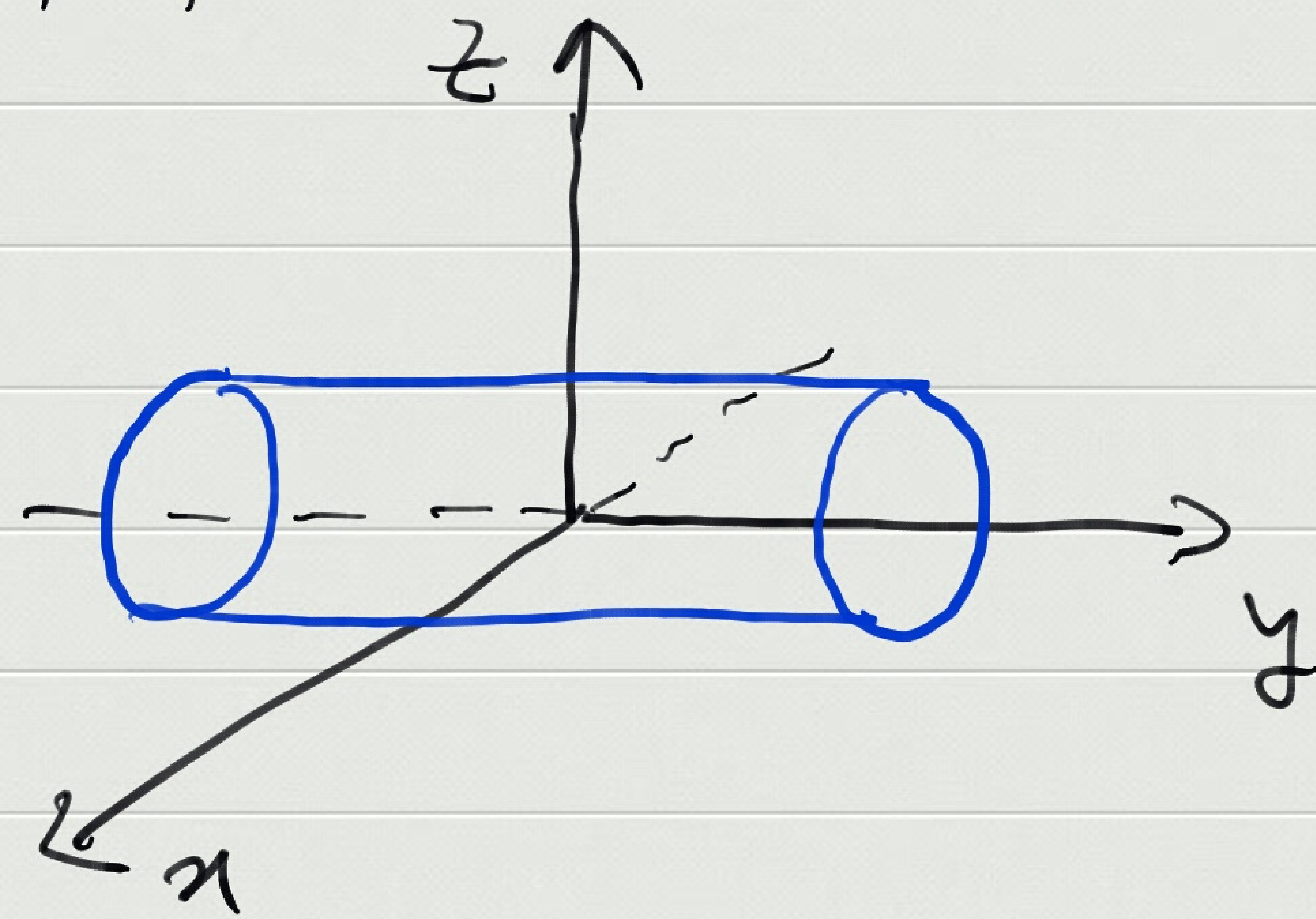
Relativamente à inequação $z^2 \leq x^2+y^2$ ela define os pontos exteriores ao cone duplo de equação $z^2 = x^2+y^2$.
(Note-se que o ponto $(0,0,1)$ é interior à superfície cónica $z^2=x^2+y^2$ e não satisfaz a inequação $z^2 \leq x^2+y^2$).
Dado que a superfície cónica dupla é dada em coordenadas esféricas por $\phi = \pi/4$ ou $\phi = 3\pi/4$, para descrever a região sólida fora dessas superfícies temos $\pi/4 \leq \phi \leq 3\pi/4$.
Desta forma temos o sólido E_2 descrito em coordenadas

por

$$E_2 = \left\{ (\rho, \theta, \phi) \in \mathbb{R}_0^+ \times [0, 2\pi[\times [0, \pi] : 2 \leq \rho \leq 3 \text{ e } \frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{3\pi}{4} \right\}$$

5.

a) A equação $x^2 + z^2 = 9$ define uma superfície cilíndrica paralela ao eixo YY, cujo esboço poderá ser



b) Relativamente à curva $\mathcal{C}$ descrita por $r(t)$ temos

$$\begin{cases} x(t) = 3\cos t \\ y(t) = t^2 + 4t \\ z(t) = 3\,\text{sen}\, t \end{cases}$$

Substituindo x, y, z da curva na equação da superfície S obtemos

$$9\cos^2 t + 9\,\text{sen}^2 t = 9 \quad \text{ou seja} \quad 9 = 9.$$

Assim $(x,y,z) \in \mathcal{C} \Rightarrow (x,y,z) \in S$.

Portanto todos os pontos de $\mathcal{C}$ pertencem à superfície S, e portanto a curva intersecta a superfície para todos os valores de t.

c) Temos $v(t) = r'(t) = (-3\,\text{sen}\,t, 2t+4, 3\cos t)$, o vector velocidade no instante t.

A velocidade instantânea é dada por

$$\|v(t)\| = \sqrt{9\,\text{sen}^2 t + 9\cos^2 t + (2t+4)^2}$$

$$= \sqrt{25+16t+4t^2}$$

Dado que $\|v(t)\|' = \frac{1}{2}(\underbrace{25+16t+4t^2}_{>0})^{-1/2}(\underbrace{8t+16}_{>0}) > 0$

concluímos que $\|v(t)\|$ é estritamente crescente.

6 a) Temos $\begin{cases} x = \operatorname{sen}(2t) \\ y = \cos(2t) \\ z = 0 \end{cases}$ a parametrização da curva $\mathcal{L}$.

Donde $$x^2 + y^2 = \operatorname{sen}^2(2t) + \cos^2(2t) = 1$$

Assim uma representação cartesiana é

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ e } z = 0.$$

b) A parametrização da curva $\mathcal{L}$ dada é no sentido dos ponteiros do relógio. Pretendemos agora uma nova parametrização da mesma curva que não altere o sentido mas em que o parâmetro varie no intervalo $[0,1]$.

Teremos então de encontrar uma função contínua que transforme o intervalo $[0,1]$ no intervalo $[0,2\pi]$.

Consideremos $\phi(s) = 2\pi s$. É uma bijecção crescente entre $[0,1]$ e $[0,2\pi]$.

Temos então $t = 2\pi s$ e a nova parametrização é

$$g(s) = (\operatorname{sen}(2\pi s), \cos(2\pi s), 0) \text{ com } s \in [0,1].$$