2º Teste AM2E (03/06/2016)

1. a) Comecemos por determinar $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(3,0)\\(x,y)\neq(3,0)}} f(x,y)$.

Temos $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(3,0)\\(x,y)\neq(3,0)}} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(3,0)} \dfrac{y^3}{(x-3)^2+y^2} = \dfrac{0}{0}$

Consideremos os limites direccionais da forma $y = m(x-3)$

Obtemos $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(3,0)\\ (x,y)\neq(3,0)\\ y=m(x-3)}} f(x,y) = \lim_{x\to 3} \frac{m^3(x-3)^3}{(x-3)^2+(m(x-3))^2} =$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{m^2(x-3)}{1+m^2} = 0 \ , \forall m\in\mathbb{R}$$

Provemos agora que $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(3,0)\\ (x,y)\neq(3,0)}} f(x,y) = 0.$

Temos

$$0 \leq \left| f(x,y) - 0 \right| = \left| \frac{y^3}{(x-3)^2+y^2} \right| = \frac{y^2\cdot|y|}{(x-3)^2+y^2} \leq$$

$$\leq \frac{\left((x-3)^2+y^2\right)|y|}{(x-3)^2+y^2} = |y| \xrightarrow[(x,y)\to(3,0)]{} 0$$

Portanto

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(3,0)\\(x,y)\neq(3,0)}} f(x,y) = 0 = f(3,0).$$

Concluímos assim que f é contínua em $(3,0)$.

b) Dado que o ponto $(0,0)$ não é um ponto de mudança de ramo podemos calcular as derivadas parciais usando as regras de derivação.

Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^3 \frac{\partial}{\partial x}\left(\left((x-3)^2+y^2\right)^{-1}\right) = -y^3\left((x-3)^2+y^2\right)^{-2} \cdot 2(x-3)$$

$$= -2\frac{(x-3)y^3}{(x-3)^2+y^2}.$$

Donde $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

Por outro lado temos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3y^2\left((x-3)^2+y^2\right) - 2y\, y^3}{\left((x-3)^2+y^2\right)}.$$

Donde $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Assim $\operatorname{grad} f(0,0) = (0,0)$.

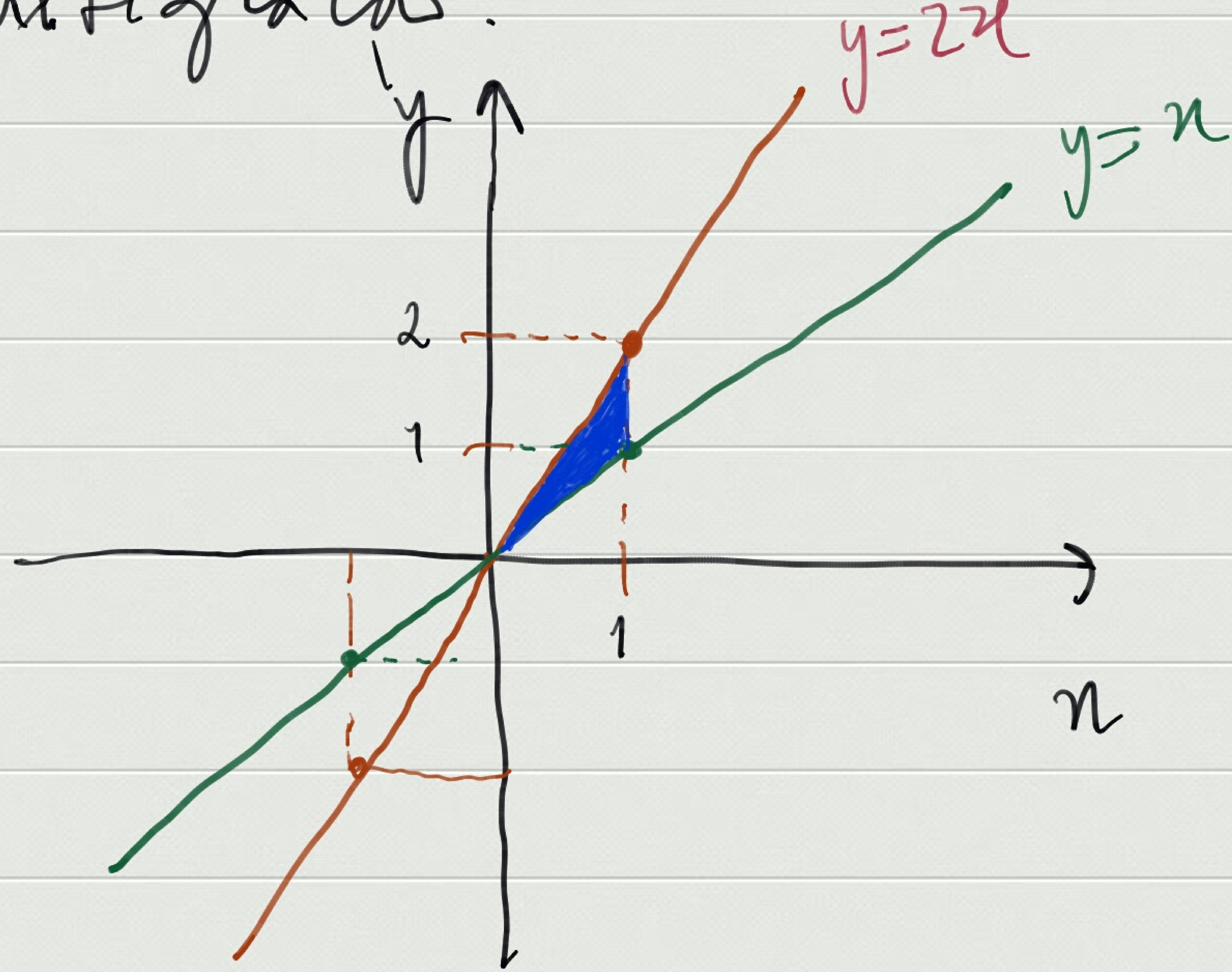
e) A função f numa vizinhança de $(0,0)$ é definida por um quociente de 2 polinómios em x e y que são funções diferenciáveis, logo f é diferenciável em $(0,0)$.

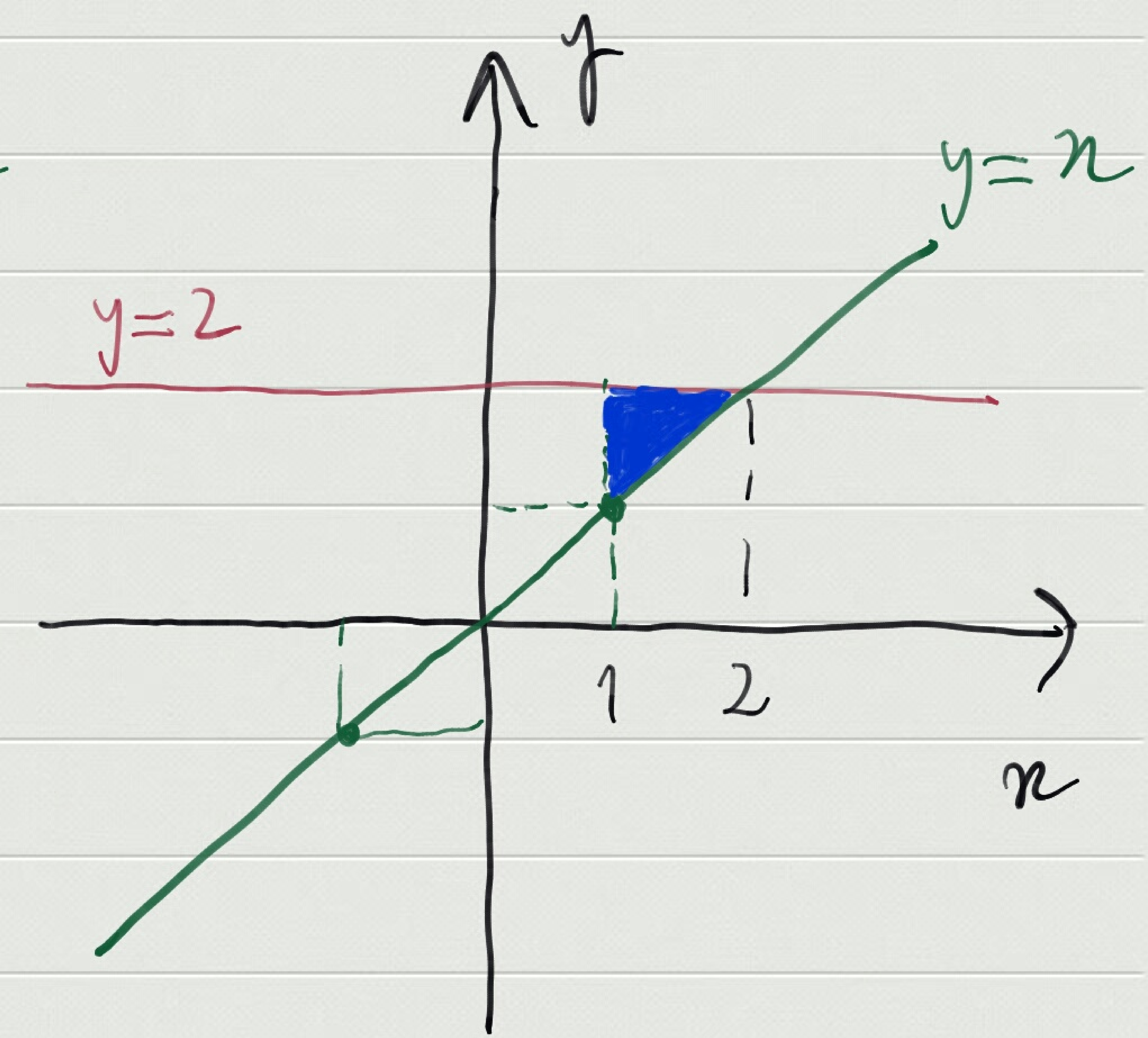
b) Dado que f é diferenciável em $(0,0)$ temos

$$D_{\vec{u}} f(0,0) = \operatorname{grad} f(0,0) \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} =$$

$$= (0,0) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 .$$

2. Representemos geometricamente as 2 regiões de integração.





$0 \leq x \leq 1$

$x \leq y \leq 2x$

$1 \leq x \leq 2$

$x \leq y \leq 2$

Invertendo a ordem de integração temos

$$\int_0^1 \int_x^{2x} e^{y^2}\,dy\,dx + \int_1^2 \int_x^2 e^{y^2}\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 \int_{y/2}^{y} e^{y^2}\,dx\,dy + \int_1^2 \int_{y/2}^{1} e^{y^2}\,dx\,dy + \int_1^2 \int_1^{y} e^{y^2}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \left(y - \frac{y}{2}\right) e^{y^2}\,dy + \int_1^2 \left(1 - \frac{y}{2}\right) e^{y^2}\,dy + \int_1^2 (y-1) e^{y^2}\,dy$$

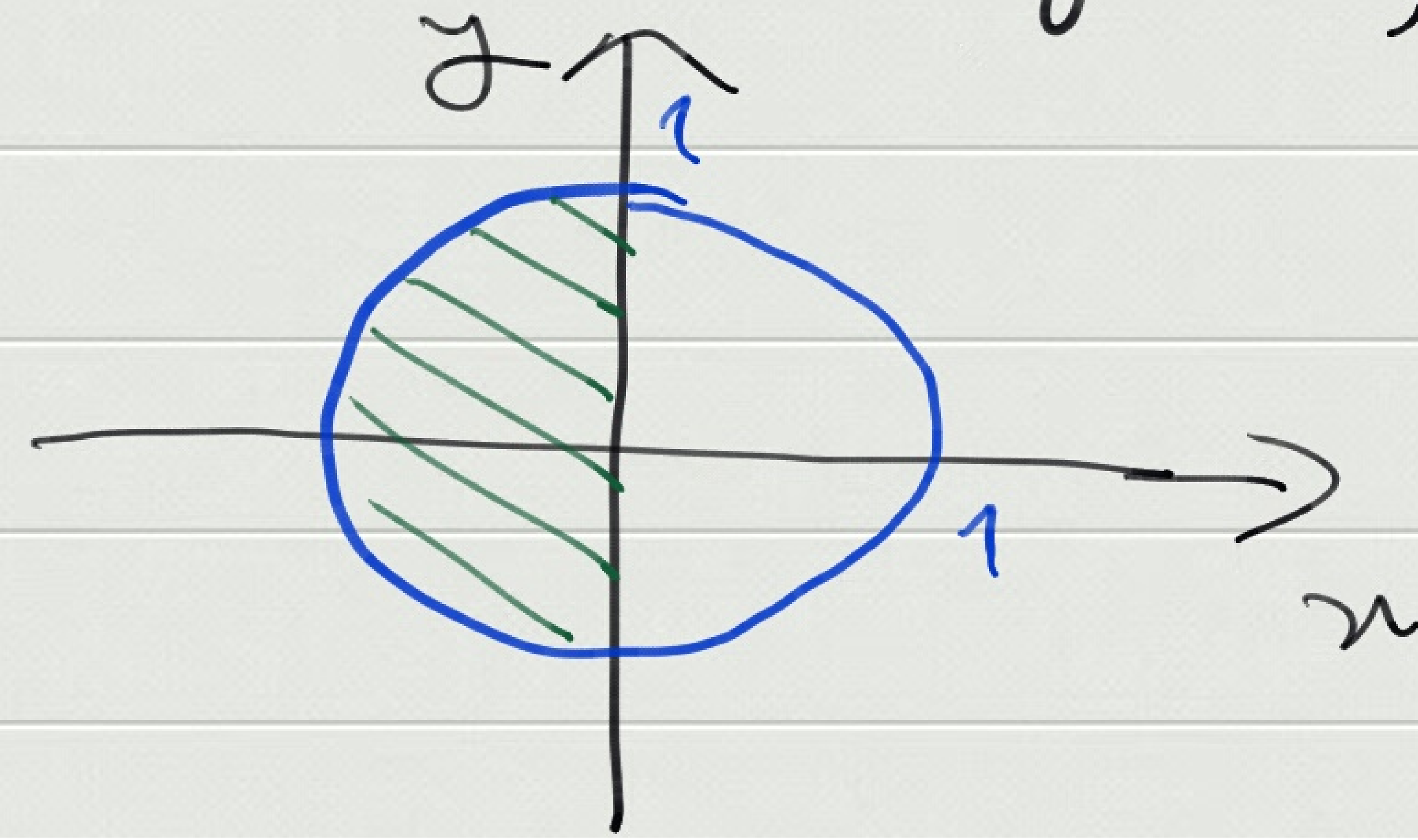
$$= \int_0^1 \frac{y}{2} e^{y^2}\,dy + \int_1^2 \frac{y}{2} e^{y^2}\,dy$$

$$= \int_0^2 \frac{y}{2} e^{y^2}\, dy = \frac{1}{4} \int_0^2 2y e^{y^2}\, dy =$$

$$= \frac{1}{4} \left[e^{y^2} \right]_0^2 = \frac{1}{4} \left(e^4 - 1 \right).$$

b) Temos $-1 \leq x \leq 0$, $-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$ e $-x^2-y^2 \leq z \leq 0$.

Assim como "sombra"/projecção do sólido no plano OXY ($z=0$) temos a região,



o sólido está limitado superiormente pela superfície $z=0$ e inferiormente pela superfície $z = -x^2-y^2$

Logo em coordenadas cilíndricas a região de integração E é dada por

$$0 \le r \le 1,\ \tfrac{\pi}{2} \le \theta \le \tfrac{3\pi}{2} \text{ e } -r^2 \le z \le 0.$$

Portanto obtemos

$$\int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-x^2-y^2}^{0} \cos(x^2+y^2)^2\, dz\, dy\, dx = \iiint_E \cos(x^2+y^2)^2\, dV$$

$$= \int_{0}^{1}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\int_{-r^2}^{0} \cos(r^4)\cdot r\, dz\, d\theta\, dr =$$

$$\int_0^1 \int_{\pi/2}^{3\pi/2} r^3 \cos(r^4)\, d\theta\, dr = \frac{1}{4}\pi \int_0^1 4r^3 \cos(r^4)\, dr$$

$$= \frac{1}{4}\pi \left[\operatorname{sen}(r^4)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}\operatorname{sen}(1).$$

3. a) Comecemos por calcular as derivadas parciais de g num ponto genérico.

Temos $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = e^{xy^2} + x\left(y^2 e^{xy^2}\right)$ e

$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2x^2 y\, e^{xy^2}$.

Donde $\frac{\partial g}{\partial x}(1,0)=1$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(1,0)=0$.

A equação do plano tangente referido pode ser dada por

$$z = g(1,0) + \frac{\partial g}{\partial x}(1,0)(x-1) + \frac{\partial g}{\partial y}(1,0)(y-0)$$

ou seja $z = x$.

b) A aproximação linear de $g(x,y)$ em torno do ponto $(1,0)$ é dada por

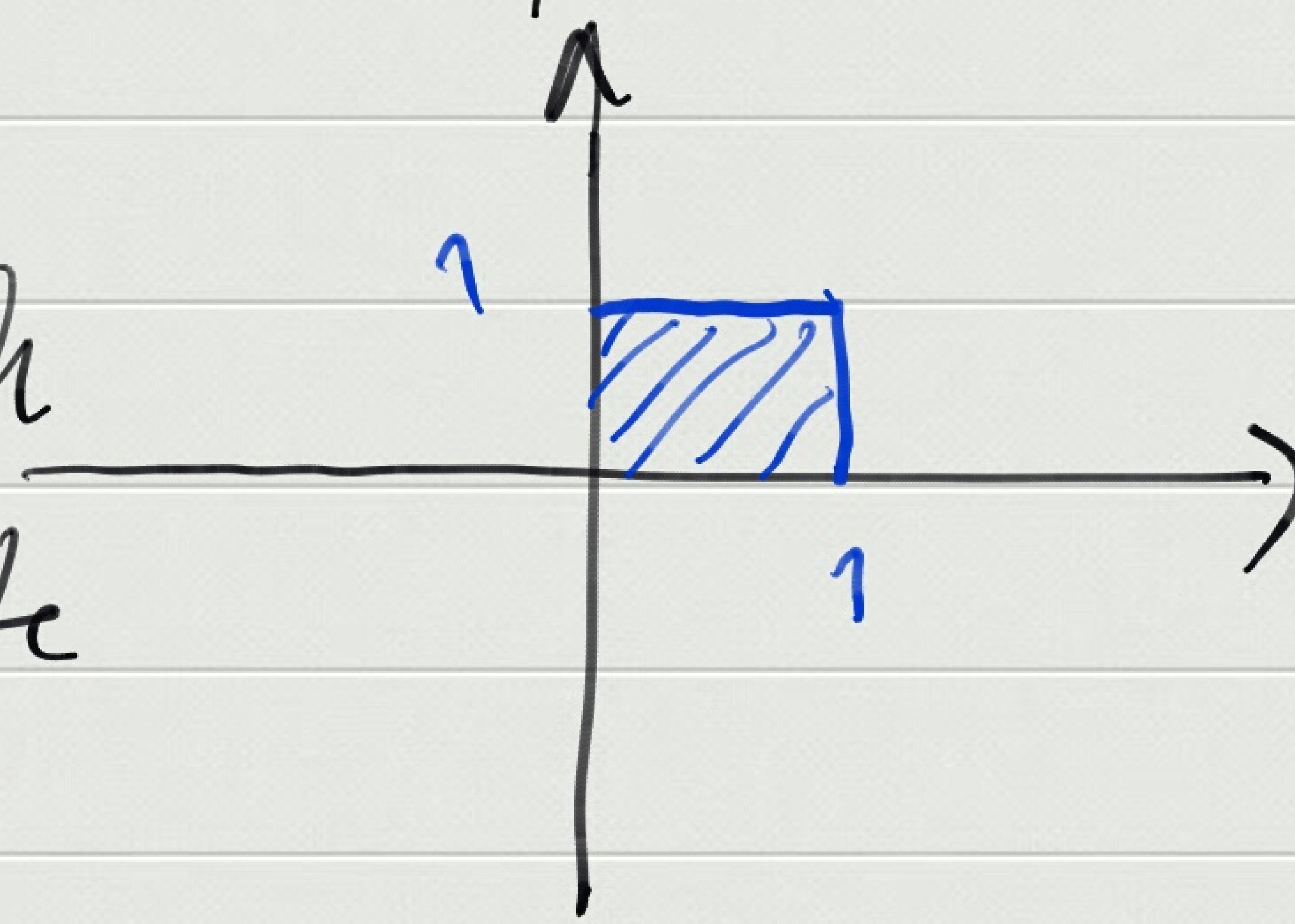
$$L(x,y) = g(1,0) + \frac{\partial g}{\partial x}(1,0)(x-1) + \frac{\partial g}{\partial y}(1,0)(y-0)$$

$$= x$$

a)

Donde $L(1.1,-0.1) = 1.1 \approx g(1.1,-0.1)$.

4. a) A "sombra" do sólido E no plano OXY tem a representação



O sólido E é limitado superiormente por $z = \frac{12 - x - 2y}{3}$ e inferiormente por $z = 0$.

i) $$V(E) = \iint_R \frac{12-x-2y}{3}\, dA = \int_0^1\int_0^1 \frac{12-x-2y}{3}\, dy\, dx$$

ii) $$V(E) = \iiint_E 1\, dV = \int_0^1\int_0^1\int_0^{\frac{12-x-2y}{3}} 1\, dz\, dy\, dx$$

b) $$V(E) = \int_0^1\int_0^1 \frac{12-x-2y}{3}\, dy\, dx = \frac{1}{3}\int_0^1 12 - x - 2\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 (11-x)\, dx = \frac{1}{3}\left(11-\frac{1}{2}\right) = \frac{21}{6}.$$

5. Seja $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\} = A \cup B$

onde $A = \{(x,y) : x^2+y^2 < 4\}$ e $B = \{(x,y) : x^2+y^2 = 4\}$.

Como D é um conjunto limitado e fechado e f é contínua em D podemos pelo teorema de Weierstrass que f é tem máximo e mínimo em D.

Determinemos os "candidatos" a extremo no conjunto A, que sendo aberto, correspondem aos pontos críticos de f.

Temos $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 0 \\ 1 = 0 \\ -2 = 0 \end{cases}$ sistema impossível.

Vejamos agora os candidatos a extremo em B, que constituem a fronteira de D.
São os pontos críticos de

$$L(x,y,z,\lambda) = 2x + y - 2z - \lambda(x^2 + y^2 - 4)$$

(método dos multiplicadores de Lagrange.).

Obtemos o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial h}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial h}{\partial z} = 0 \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-2\lambda x = 0 \\ 1-2\lambda y = 0 \\ -2-2\lambda z = 0 \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2y-2\lambda xy = 0 \\ x-2\lambda xy = 0 \\ \\ \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ \\ \\ \\ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \\ z - 2\lambda yz = 0 \\ -2y - 2\lambda yz = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = -2y \\ \end{cases}$$

Substituindo na última equação vem $y = \pm 2/3$.

Assim os candidatos a máximo e mínimo de f são os pontos

$$\left(4/3, 2/3, -4/3\right), \left(-4/3, -2/3, 4/3\right).$$

Calculando as imagens destes pontos temos

$f(4/3, 2/3, -4/3) = 18/3$ e $f(-4/3, -2/3, 4/3) = -18/3$.

Logo o máximo é $18/3$ e o mínimo é $-18/3$.

6. O esquema da função composta é

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \longmapsto (\underbrace{x^2}_{u}, \underbrace{ye^x}_{v}) \longmapsto \log(g(u,v))$$

Temos $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} e e$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{g(u,v)} \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{1}{g(u,v)} \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) \frac{\partial v}{\partial x}(x,y),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{g(u,v)} \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{1}{g(u,v)} \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$$

Ora $(x,y) = (1,1) \Rightarrow (u,v) = (1,e)$.

Assim $\frac{\partial g}{\partial u}(1,e) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,e) = 2x\Big|_{(1,e)} = 2$ e

$\frac{\partial g}{\partial v}(1,e) = \frac{\partial u}{\partial y}(1,e) = ye^{x}\Big|_{(1,e)} = e$.

Portanto

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{1}{g(1,e)}\frac{\partial g}{\partial u}(1,e)\frac{\partial u}{\partial x}(1,1) + \frac{1}{g(1,e)}\frac{\partial g}{\partial v}(1,e)\frac{\partial v}{\partial x}(1,1)$$

$$= 2 + \frac{1}{2}e^2$$

Analogamente temos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{1}{2}e^2.$$

Portanto $\operatorname{grad} f(1,1) = \left(2 + \frac{1}{2}e^2, \frac{1}{2}e^2\right)$.