FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Análise Matemática II E

Departamento de Matemática FCT-UNL
Recurso (10/01/2017) - 1º Semestre - 2016/2017

1ª Parte

1. Resolva a equação diferencial $ty' = 2 - (1+t)y$ para $t > 0$.

2. Um modelo populacional de uma determinada cultura de bactérias num ambiente de laboratório é dado pela equação diferencial $\frac{dy}{dt} = ky$, onde k é uma constante positiva, t é a variável tempo e $y = y(t)$ representa o número de bactérias em função do tempo em horas.

   (a) Resolva a equação diferencial usando o método de variáveis separáveis;

   (b) Sabendo que no ínicio existem 1000 bactérias e após 3 horas existem 500000, determine o número de bactérias que existirão ao fim de um dia.

3. Considere as superfícies S_1, S_2 e S_3 definidas respetivamente pelas equações

$$y^2 + z^2 = (x-1)^2 + 1, \qquad \frac{6x+2y}{3} = 4 - 6z \quad \text{e} \quad z = \sqrt{3 - x^2 + 2x - y^2}.$$

   Identifique:

   (a) as três superfícies. Faça um esboço de cada uma;

   (b) a secção $z = 0$ da superfície S_2.

   (c) a superfície que se obtém por reflexão pelo plano $z = 0$ da superfície S_3.

4. Mude de sistemas de coordenadas os seguintes conjuntos:

   (a) superfície definida por $\phi = \frac{\pi}{6}$ de coordenadas esféricas para coordenadas cartesianas;

   (b) região plana $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1, y \leq x \text{ e } y \geq 0\}$ de coordenadas cartesianas para coordenadas polares.

5. Utilize uma aproximação linear para obter um valor aproximado de $f(4.1, 3.95)$ sendo

$$f(x,y) = xy + \log\sqrt{xy}.$$

6. Seja $\mathcal{C}$ a curva resultante da interseção das superfícies $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ e $y = 2x + 1$. Determine uma parametrização da curva $\mathcal{C}$.

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Análise Matemática II E

Departamento de Matemática FCT-UNL

Recurso (10/01/2017) - 1º Semestre - 2016/2017

2ª Parte

7. Considere a função definida em $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2 \cos x}{2x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ k & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a) Averigue se existe algum valor de k para o qual f seja contínua no ponto $(0,0)$ (Sugestão: estude os limites direccionais e ao longo da curva $x = y^2$) ;

   (b) Considere $k = 0$.

      i. Dado o vector $\vec{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ estude a existência de derivada direccional $D_v f(0,0)$.

      ii. Diga, justificando, se f é diferenciável no ponto $(0,0)$.

8. Seja $I = \int_1^{\sqrt{e}} \int_{\log(x^2)}^1 f(x,y)dy\, dx$.

   (a) Esboce a região de integração e mude a ordem de integração na expressão de I.

   (b) Calcule a área da região $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq \sqrt{e} \ \wedge \ \log(x^2) \leq y \leq 1\}$.

9. Considere o sólido $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 4 \ \wedge \ z \geq 1 \ \wedge \ x \geq 0\}$. Calcule o volume de S.

10. Usando coordenadas esféricas calcule $\int\int\int_B z^2 \ dV$, onde B é o sólido limitado superiormente pela superfície $x^2+y^2+z^2 = 4$ e inferiormente pela superfície $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

11. Seja $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que $\nabla g(3,1) = (2,4)$. Considere a função

$$h(x,y) = e^{2xy} + g(3, \frac{xy^2}{2} + y).$$

   Calcule $\nabla h(0,1)$.

12. Determine os extremos locais da função $f(x,y) = \frac{y^4}{2} - xy^2 + x^2 - 4x$.