10/1/2017

Exame de AM2E - 1º Semestre (uma resolução).

1. Temos uma equação diferencial linear de 1ª ordem,

$$ty' = 2 - (1+t)y \iff ty' + (1+t)y = 2 \iff y' + \frac{1+t}{t}y = \frac{2}{t}.$$

Seja $G(t) = \int \frac{t+1}{t}\,dt = \int 1 + \frac{1}{t}\,dt = t + \log t.$

O factor integrante é $e^{G(t)} = e^{t+\log t} = te^t.$

Assim obtemos a equação equivalente

$$te^t y' + (1+t)e^t y = 2te^t \iff (te^t y)' = \int 2e^t\,dt \iff$$

$$\iff te^t y = 2e^t + c$$

$$\iff y = \frac{2}{t} + \frac{c}{te^t}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

2.

a) Temos

$$\frac{dy}{dt} = ky \iff \frac{1}{y}dy = k\,dt \iff \int \frac{1}{y}dy = \int k\,dt \iff$$

$$\iff \log y = kt + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$\iff y = e^{kt+c} \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$\iff y = e^{kt} \cdot c \quad (c > 0)$$

A solução é $y = ce^{kt}$ com $c \in \mathbb{R}^+$.

b) Temos $y(0) = 1000 \iff 1000 = ce^0 \iff c = 1000$. Donde $y = 1000e^{kt}$.

Por outro lado $y(3) = 500000 \iff 500000 = 1000e^{3K} \iff$

$$\iff 500 = e^{3K} \iff 3K = \log(500)$$

$$\iff K = \frac{\log(500)}{3}.$$

Portanto $y(t) = 1000\, e^{\frac{\log(500)}{3} \cdot t} = 1000 \log(500^{t/3}) = 2 \cdot 500^{\frac{t+3}{3}}$

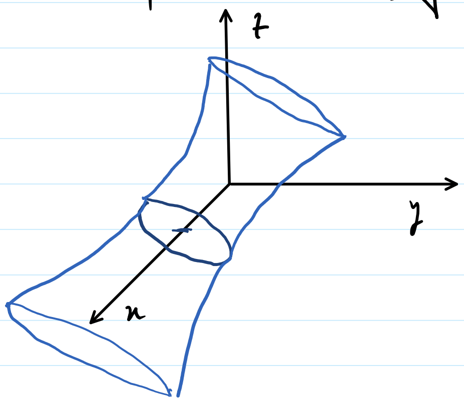
$y(24) = 2 \cdot 500^{27/3} = 2 \cdot 500^9.$

$$y(24) = 2.500^{2/3} = 2.500'.$$

3.

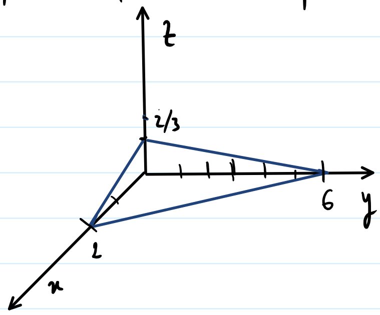
a) $S_1 : y^2+z^2 = (x-1)^2+1 \Leftrightarrow y^2+z^2-(x-1)^2 = 1$

É um hiperbolóide de 1 folha ao longo do eixo XX



$S_2 : \dfrac{6x+2y}{3} = 4-6z \Leftrightarrow 3x+y+18z = 6$

É um plano que não é paralelo a nenhum dos eixos.



Pontos de intersecção com os eixos

$x=0, y=0$ vem $z = \dfrac{2}{3}$

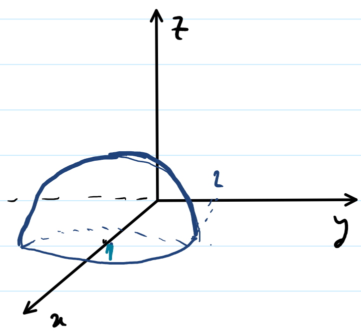
$y=0, z=0$ vem $x=2$

$x=0, z=0$ vem $y=6$

$S_3 : z = \sqrt{3-x^2+2x-y^2} \Leftrightarrow z^2 = 3-x^2+2x-y^2$ e $z \geq 0 \Leftrightarrow x^2-2x+y^2+z^2 = 3$ e $z \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+z^2 = 4$ e $z \geq 0$ $\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+z^2 = 4$ e $z \geq 0$

É a metade superior da superfície esférica de raio 2 e centro $(1,0,0)$.



b) A secção $z=0$ da superfície S é dada pela equação

$3x+y = 6 \Leftrightarrow y = 6-3x$,

que é a recta de declive -3 que passa no ponto $(0,6)$.

A superfície que é a reflexão da superfície S_3 pelo plano $z=0$ obtém-se substituindo z por $-z$ e temos assim a equação

$$z = -\sqrt{3-x^2+2x-y^2} \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+z^2=4 \text{ e } z \leq 0$$

que é a superfície a metade inferior da superfície esférica de raio 2 e centro $(1,0,0)$.

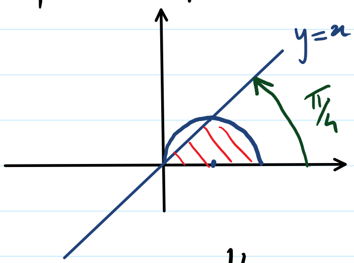
4.

a) Temos $\phi = \pi/6$. De $z = \rho\cos\phi$ vem $z = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\cos\pi/6 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow z^2 = \frac{3}{4}(x^2+y^2+z^2) \text{ e } z \geq 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 = 3(x^2+y^2) \text{ e } z \geq 0 \Leftrightarrow z = \sqrt{3(x^2+y^2)}.$$

b) Façamos a representação geométrica da região R.



De $y \leq x$ e $y \geq 0$ resulta $0 \leq \theta \leq \pi/4$

De $(x-1)^2+y^2 \leq 1$ vem $(r\cos\theta-1)^2 + r^2\sin^2\theta \leq 1 \Leftrightarrow$

$$r^2\cos^2\theta - 2r\cos\theta + 1 + r^2\sin^2\theta \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$r^2 - 2r\cos\theta \leq 0 \Leftrightarrow r(r-2\cos\theta) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$r - 2\cos\theta \leq 0 \Leftrightarrow r \leq 2\cos\theta$$

Assim $R = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}_0^+ \times [0,2\pi[: \theta \leq \pi/4 \text{ e } r \leq 2\cos\theta\}$.

5. Calculemos as derivadas parciais de $f(x,y)$. Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x + \frac{1}{(xy)^{1/2}}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left((xy)^{1/2}\right) = x + \frac{1}{(xy)^{1/2}}\cdot\frac{1}{2}(xy)^{-1/2}\cdot y$$

$$= x + \frac{1}{2x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y + \frac{1}{(xy)^{1/2}}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left((xy)^{1/2}\right) = y + \frac{1}{(xy)^{1/2}}\cdot\frac{1}{2}(xy)^{-1/2}x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y + \frac{1}{(xy)^{1/2}} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left((xy)^{1/2}\right) = y + \frac{1}{(xy)^{1/2}} \cdot \frac{1}{2}(xy)^{-1/2} x$$

$$= y + \frac{1}{2y} \qquad 4 + \frac{1}{8} = \frac{33}{8}$$

A aproximação linear de $f(x,y)$ em torno do ponto $(2,2)$ é dada por

$$L(x,y) = f(4,4) + \frac{\partial f}{\partial x}(4,4)(x-4) + \frac{\partial f}{\partial y}(4,4)(y-4)$$ e assim

$$f(2.1, 1.95) = f(4,4) + \frac{\partial f}{\partial x}(4,4)(4{,}1-4) + \frac{\partial f}{\partial y}(4,4)(3{,}95-4) =$$

$$= 16 + 2\log 2 + \frac{33}{8}(0{,}1) + \frac{33}{8}(-0{,}05)$$

$$= 16 + 2\log 2 + (0.05)\frac{33}{8} = 16 + 2\log 2 + \frac{33}{160}.$$

6.

a) A intersecção das duas superfícies é dada pelo sistema

$$\begin{cases} \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 \\ y = 2x+1 \end{cases} \iff \begin{cases} \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{3}\right)^2 = 1 \\ x = \frac{y-1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{33}{165} \quad \frac{165}{800} \quad \frac{160}{33}$$

De $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ vem $\left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{3}\right)^2 = 1$ donde parametrizando temos

$\frac{y}{2} = \cos t$ e $\frac{z}{3} = \sin t$ ou seja $y = 2\cos t$ e $z = 3\sin t$.

Assim temos como parametrização C temos

$$\begin{cases} x = \frac{2\cos t - 1}{2} \\ y = 2\cos t \\ z = 3\sin t \end{cases}$$