7. a) Calculemos os limites direccionais no ponto $(0,0)$. Temos

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x\, m^2 x^2 \cos x}{2x^2 + m^4 x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2 x \cos x}{2 + m^4 x^2} = 0 .$$

Por outro lado o limite ao longo da curva $y = x^2$ é

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^2}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{y^4 \cos(y^2)}{2y^4 + y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(y^2)}{3} = \frac{1}{3} .$$

Dado que os limites direccionais dão um valor diferente do limite ao longo da curva $x = y^2$ concluimos que não existe limite da função f no ponto $(0,0)$. Por conseguinte não existe nenhum valor de K para o qual a função f seja contínua no ponto $(0,0)$.

b) i) Dado que a função f não é diferenciável em $(0,0)$, para calcularmos a derivada direccional no ponto $(0,0)$ teremos de calculá-la por definição. Tem-se

$$D_{\vec{v}} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0) + t\vec{v}) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right)}{t} =$$

$$= \frac{\dfrac{\frac{t}{\sqrt{2}}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)}{2\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^4}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)}{2\sqrt{2}\, t^3 \left(1 + \frac{t^2}{4}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Portanto a derivada direccional $D_{\vec{v}} f(0,0)$ existe e é igual a $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

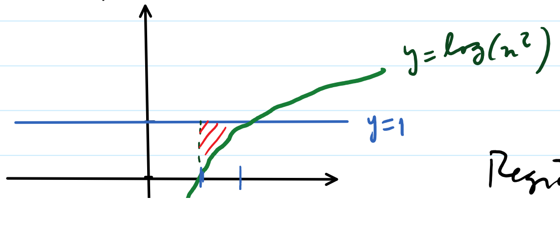
ii) A função f não é diferenciável no ponto $(0,0)$ visto que como vimos atrás não é contínua em $(0,0)$.

8.

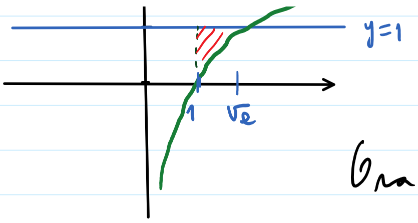
a) Relativamente à região de integração temos

$$1 \le x \le \sqrt{e} \quad \text{e} \quad \log(x^2) \le y \le 1$$

cuja representação geométrica é a seguinte



Região do tipo I



Região do tipo I

Ora $y = \log(x^2) \Leftrightarrow x^2 = e^y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{e^y} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = e^{y/2}$

Passando para região do tipo II temos

$0 \le y \le 1$ e $1 \le x \le e^{y/2}$.

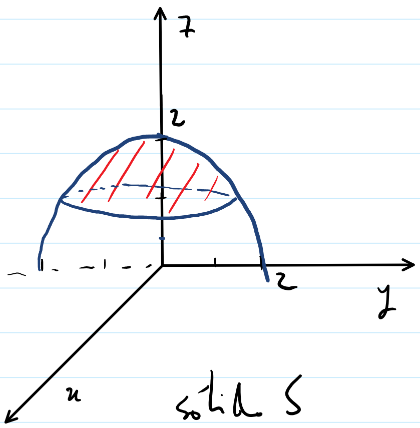
Logo $I = \int_1^{\sqrt{e}} \int_{\log(x^2)}^{1} f(x,y)\, dy\, dx = \int_0^1 \int_1^{e^{y/2}} f(x,y)\, dx\, dy$.

b) Área de $A = \iint_A 1\, dA = \int_0^1 \int_1^{e^{y/2}} 1\, dx\, dy = \int_0^1 (e^{y/2} - 1)\, dy$

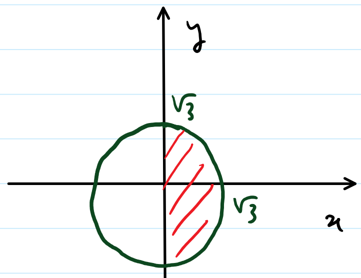
$$= 2\left[e^{y/2}\right]_0^1 - 1 = 2e^{1/2} - 3$$

9. A superfície $x^2+y^2+z^2 = 4$ com $z \geq 0$ em coordenadas cilíndricas é dada por $r^2 + z^2 = 4$, ou seja $z = \sqrt{4-r^2}$.

A sombra do sólido S no plano XOY é obtida considerando a secção $z=1$ de $x^2+y^2+z^2 \le 4$, obtendo assim $x^2+y^2 \le 3$ e $x \geq 0$



sólido S



"sombra" do sólido S

Então $V(S) = \iiint_S 1\, dV = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{4-r^2}} 1 \cdot r\, dz\, dr\, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{3}} (r\sqrt{4-r^2} - r)\, dr\, d\theta$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\left(-\frac{1}{2}\right) \left[\frac{(4-r^2)^{3/2}}{\frac{3}{2}} \right]_0^{\sqrt{3}} - \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{3}} \right) d\theta = \frac{5\pi}{6}$$

10.

$\pi/2$

10.

$$\iiint_B z^2\, dV = \int_0^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} (\rho\cos\phi)^2 \rho^2 \sin\phi \, d\phi\, d\theta\, d\rho$$

$$= \int_0^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} \rho^4 \cos^2\phi \sin\phi \, d\phi\, d\theta\, d\rho = \int_0^2 \rho^4 \int_0^{2\pi} -\left[\frac{\cos^3\phi}{3}\right]_0^{\pi/4} d\theta\, d\rho$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}-1\right)\cdot 2\pi \int_0^2 \rho^4\, d\rho = \frac{2}{3}\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^2 = \frac{64}{15}\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

11. O esquema da função composta $g(3, \frac{xy^2}{2}+y)$ é

$$(x,y) \longrightarrow (\underbrace{3}_{u}, \underbrace{\tfrac{xy^2}{2}+y}_{v}) \longrightarrow g(u,v)$$

Então temos

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,v)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) + 2ye^{2xy}$$

$$= \frac{\partial g}{\partial u}(u,v)\cdot 0 + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\cdot\frac{y^2}{2} + 2ye^{2xy}$$

$$= \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\cdot\frac{y^2}{2} + 2ye^{2xy}$$

e $$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,v)\cdot\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\cdot\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) + 2xe^{2xy}$$

$$= \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\cdot(xy+1) + 2xe^{2xy}$$

Ora para $(x,y)=(0,1)$ vem $(u,v)=(3,1)$.

Assim temos $\frac{\partial h}{\partial x}(0,1) = \frac{\partial g}{\partial v}(3,1)\cdot\frac{1}{2} + 2 = 4$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(0,1) = \frac{\partial g}{\partial v}(3,1)\cdot 1 = 4$$

Portanto $\nabla h(0,1) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}(0,1), \frac{\partial h}{\partial y}(0,1)\right) = (4,4)$

12. Determinemos os pontos críticos de f:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y^2+2x-4=0 \\ 2y^3-2xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ y(y^2-x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \text{———} \\ y=0 \vee x=y^2 \end{cases}.$$

Se $y=0$ vem $2x-4=0$ ou seja $x=2$

Se $x=y^2$ vem $y=2$ ou $y=-2$, donde nesses casos $x=4$.

Obtemos então os pontos $(2,0)$, $(4,2)$ e $(4,-2)$.

- Para o ponto $(2,0)$ temos

$rt-s^2=2.(-4)-0=-8<0$ e portanto $(2,0)$ é um ponto de sela

- Para o ponto $(4,2)$ temos

$rt-s^2=2.16-(-4)^2=16>0$ e $r^2=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(4,2)=2>0$ logo $(4,2)$ é um ponto de mínimo local.

- Para o ponto $(4,-2)$ temos

$rt-s^2=2.16-4^2=16>0$ e $r=2>0$ logo $(4,-2)$ é um ponto de mínimo local.