1º Teste (26/10/16)

24 de outubro de 2016 21:25

1 a) A equação $2ty'-y=t+1$ é uma equação diferencial linear de 1ª ordem. Temos

$$2ty'-y=t+1 \Leftrightarrow y'-\frac{1}{2t}y=\frac{t+1}{2t}.$$

Seja $G(x)=\int -\frac{1}{2t}\,dt=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{t}\,dt=-\frac{1}{2}\log(t)$.

Assim o factor integrante é $\mu=e^{-\frac{1}{2}\log t}=e^{\log t^{-1/2}}=t^{-1/2}$.

Então temos por equivalência a equação

$$\frac{1}{\sqrt{t}}y'-\frac{1}{2\sqrt{t}}y=\frac{1}{2}\,\frac{t+1}{t\sqrt{t}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{t}}y\right)'=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}+\frac{1}{t\sqrt{t}}\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{t}}y=\int\frac{1}{2}\left(t^{-1/2}+t^{-3/2}\right)dt \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{t}}y=\frac{1}{2}\left(\frac{t^{1/2}}{\frac{1}{2}}+\frac{t^{-1/2}}{-\frac{1}{2}}\right)+c \quad (c\in\mathbb{R})$$

$y=t-1+ct^{1/2}$. Dado que $y(2)=4$ vem

$$4=2-1+c\sqrt{2}, \text{ ou seja } c=\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Assim sendo a solução do problema é $y=t-1+\frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{t}$.

b) A equação $y'-6y^2x=0$ é uma equação não linear de 1º ordem.

Temos $y'-6y^2x=0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=6y^2x \Leftrightarrow$

$\frac{dy}{y^2}=6x\,dx$. Trata-se pois de uma equação de variáveis separáveis. Então temos

$$\int y^{-2}\,dy=\int 6x\,dx, \text{ ou seja } \frac{y^{-1}}{-1}=6\frac{x^2}{2}+c, \; c\in\mathbb{R}$$

Logo $-\frac{1}{y}=3x^2+c$, ou ainda $y=\frac{-1}{3x^2+c}$, $c\in\mathbb{R}$.

Logo $-\frac{1}{y} = 3x^2 + C$, ou ainda $y = \frac{-1}{3x^2+C}$, $c \in \mathbb{R}$.

Vejamos se a equação tem soluções constantes $y = K$.

Se $y = K$ vem $(K)' - 6K^2 x = 0 \Leftrightarrow -6K^2 x = 0 \quad \forall x$

Logo $K = 0$. Por conseguinte a equação admite a solução constante $y = 0$.

c) Trata-se de uma equação não linear de 1.ª ordem.

Fazendo $u = 4x - y$ temos $y = 4x - u$ donde vem

$$(4x-u)' - (4x - (4x-u) + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$4 - u' - (u+1)^2 = 0 \Leftrightarrow u' = 4 - (u+1)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{du}{4-(u+1)^2} = 1\,dx$$, que é uma equação de variáveis separáveis com incógnita u.

2. a) Temos $f(x_n, y_n) = -\frac{y_n}{x_n}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ e $\Delta x = 0.2$

Obtemos a seguinte tabela

x_n	y_n	$f(x_n, y_n)\Delta x$	y_{n+1}
1	1	$-0,2$	0,8
1,2	0,8	$-2/15$	2/3
1,4	2/3	—	—

Cálculo auxiliar:

$$f(x_0, y_0)\Delta x = (-1)(0,2) = -0,2$$
$$f(x_1, y_1)\Delta x = -\frac{8}{10} \cdot \frac{10}{12} \cdot \frac{2}{10} = -\frac{16}{120}$$

b) Vejamos que $y = \frac{c}{x}$ é solução da equação diferencial $y' + \frac{1}{x} y = 0$.

Temos $\left(\frac{c}{x}\right)' + \frac{1}{x} \cdot \frac{c}{x} = -\frac{c}{x^2} + \frac{c}{x^2} = 0$ ✓

Sendo $y(1)=1$ vem $1 = \frac{c}{1}$ ou seja $c=1$.

Logo $y = \frac{1}{x}$ é solução do problema de valores iniciais com $c=1$.

c) o erro absoluto é

$$\left| y(1,3) - y_3 \right| = \left| \frac{1}{1,4} - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{10}{14} - \frac{2}{3} \right| =$$

$$= \frac{30-28}{14 \cdot 3} = \frac{1}{21}$$

3. a) $S_1 : \frac{z^2-1}{2} = \frac{x^2}{4} + y^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} - z^2 = -1$

É um hiperboloide de 2 folhas ao longo do eixo zz.

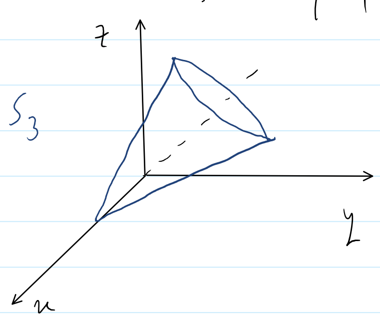
$S_2 : z = \sqrt{4-x^2-y^2} \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 = 4$ e $z \geq 0$

Metade da superfície esférica de centro $(0,0,0)$ raio 2 e acima do plano $z=0$.

$S_3 : x = 1 - \sqrt{y^2+z^2} \Leftrightarrow x-1 = -\sqrt{y^2+z^2}$

É uma superfície cónica simples ao longo do eixo xx cujo vértice é $(1,0,0)$.

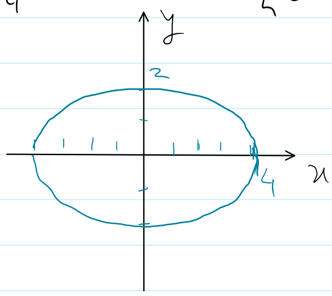
b)



Secção $z=3$ de S_1:

$$\frac{9-1}{2} = \frac{x^2}{4} + y^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

$$\frac{9-1}{2} = \frac{x^2}{4} + y^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$



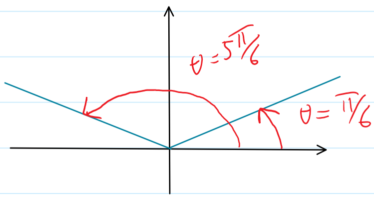
e) S_2 é coordenadas cilíndricas

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \Leftrightarrow z = \sqrt{4 - r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt{4 - r^2(\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1})} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt{4 - r^2}$$

4. a) Representemos os pontos cujas coordenadas polares verifique $\theta = \frac{\pi}{6}$ ou $\theta = \frac{5\pi}{6}$.



Ora $\operatorname{tg}(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e $\operatorname{tg}(5\pi/6) = -\sqrt{3}/3$

Por conseguinte os pontos referidos são os pontos das semi-rectas

$$\left\{(x,y) : y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \text{ e } y > 0\right\} \cup \left\{(x,y) : y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x \text{ e } y > 0\right\}$$

b) Secção $x = 0$ de E é

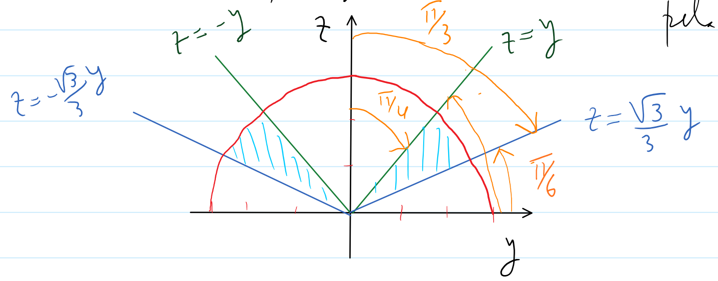
$$y^2 + z^2 \leq 9 \quad \text{e} \quad \sqrt{\frac{y^2}{3}} \leq z \leq \sqrt{y^2} \quad \text{ou seja}$$

$$y^2 + z^2 \leq 9 \quad \text{e} \quad \frac{\sqrt{3}}{3}|y| \leq z \leq |y|$$

Vejamos as igualdades $z = \frac{\sqrt{3}}{3}|y|$ e $z = |y|$

Temos $z = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}y$ e $z = \pm y$.

Como representação geométrica do domínio plano limitado pelas 3 linhas temos:



c) Temos $x^2+y^2+z^2\le 9$ corresponde em coordenadas esféricas a $\rho\le 3$.

Tendo em conta a figura de b), que é a secção do sólido pelo plano $x=0$ concluímos que

$$\pi/4 \le \phi \le \pi/3 .$$

Assim temos $\rho\le 3$, $\pi/4\le\phi\le\pi/3$ e $0\le\theta<2\pi$.

5. a) Temos $r'(t) = (2, 6\cos(2t), -6\,\text{sen}(2t))$

Para $(x,y,z) = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ obtemos $t=\pi/8$.

Por outro lado a direcção da recta tangente pedida é dada pelo vector

$$r'(\pi/8) = \left(2, 6\cos\frac{\pi}{4}, -6\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right) = \left(2, 6\frac{\sqrt{2}}{2}, -6\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Assim uma equação da recta tangente à curva no ponto $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ é

$$(x,y,z) = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) + \lambda\left(2, 6\frac{\sqrt{2}}{2}, -6\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

b) A intersecção pedida é dada pelas igualdades

$$\begin{cases} x=2t \\ y=3\,\text{sen}(2t) \\ z=3\cos(2t) \\ x=\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t=\pi \\ — \\ — \\ — \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\pi/2 \\ — \\ — \\ — \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=\pi \\ y=3\,\text{sen}\,\pi \\ z=3\cos\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pi \\ y=0 \\ z=-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3\,\mathrm{sen}\,\pi \\ z = 3\cos\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = -3 \end{cases}$$

A curva intersecta a superfície no ponto $(\pi, 0, -3)$, no instante $t = \pi/2$.

e) De acordo com os cálculos efectuados na alínea a) temos

$$r'(t) = (2, 6\cos(2t), -6\,\mathrm{sen}(2t)) \text{ e assim}$$

$$\|r'(t)\| = \sqrt{4 + 36\cos^2(2t) + 36\,\mathrm{sen}^2(2t)} = \sqrt{40}$$

Assim o comprimento de arco entre $t=0$ e t é

$$s = \int_0^t \|r'(u)\|\,du = \int_0^t \sqrt{40}\,du = \sqrt{40}\,t.$$

Donde fazendo a substituição $t = \frac{s}{\sqrt{40}}$ obtemos a parametrização por comprimento de arco

$$r(s) = \left(\frac{2s}{\sqrt{40}}, 3\,\mathrm{sen}\left(\frac{2}{\sqrt{40}}s\right), 3\cos\left(\frac{2}{\sqrt{40}}s\right)\right).$$